

DE KWADRATUUR VAN DE CIRKEL

W.J.M. van Andel¹

1. INLEIDING

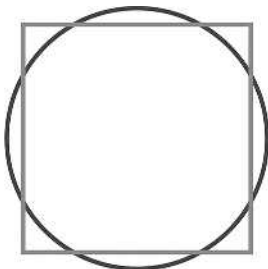
Robert is een veelzijdig jurist. Minder bekend is wellicht dat zijn veelzijdigheid zich ook uitstrekt tot een terrein dat voor de meeste juristen *terra incognita* is: de wiskunde (die samen met de filosofie wel beschouwd wordt als de *scientiarum genitrix*, de moeder aller wetenschappen). Enkele jaren geleden is Robert, naast zijn drukke baan als advocaat, wiskunde gaan studeren. Dat is een welhaast onmogelijke combinatie. Het bracht mij ertoe om aan de redactie te vragen om mijn bijdrage over een wiskundig onderwerp te mogen schrijven, omdat ik vermoed dat Robert die waarschijnlijk met meer belangstelling zal lezen dan een juridische bijdrage van mijn hand. De notie van de 'onmogelijke combinatie' bracht mij er voorts toe om over een wiskundig probleem te schrijven waarvan meer dan 2300 jaar de vraag geweest is of het überhaupt mogelijk was om het op te lossen. In het tegenwoordige spraakgebruik staat het zoeken naar de kwadratuur van de cirkel dan ook niet voor niets voor de zoektocht naar iets heel moeilijks of zelfs onmogelijks.

2. WAT IS HET PROBLEEM?

Het probleem van de kwadratuur van de cirkel is voor het eerst geformuleerd door meetkundigen in het oude Griekenland in de vijfde eeuw voor Christus. Hippocrates hield zich ermee bezig en in later eeuwen ook Archimedes. Het probleem luidt als volgt:

1. Willem Jan van Andel is voormalig advocaat bij Wijn & Stael advocaten.

Construeer met alleen passer en liniaal² in een eindig aantal stappen een vierkant dat exact dezelfde oppervlakte heeft als een gegeven cirkel.



De oude Grieken slaagden er niet in het probleem op te lossen. Ook in de tweeduizend jaar nadien slaagde niemand daarin. Wat maakt dit probleem zo weerbarstig?

3. HET GETAL π

Een aardig raadsel is het volgende. Stel je een stalen band voor rond de hele evenaar die nauw aansluit op de aarde (waarvan we voor het gemak even veronderstellen dat die volmaakt bolvormig is). Vervolgens wordt de band opgeknijpt en wordt er een stuk met een lengte van één meter tussengeplaatst. De band is nu dus een meter langer dan de omtrek van de aarde. Ga ervan uit dat de band ook nu nog steeds cirkelvormig is. Vraag: hoever staat de band nu van de aarde af? Het meest gehoorde antwoord is: heel weinig, minder dan een duizendste millimeter of zo. Het juiste antwoord verrast velen: ongeveer 16 centimeter. Dat is het simpele gevolg van het feit dat de omtrek (O) van een cirkel recht evenredig is aan zijn diameter (D): $O = \pi \times D$. Of anders geschreven: $D = O/\pi$. Toegepast op het raadsel: als de omtrek van de band met een meter toeneemt, neemt de diameter toe met $1/\pi$ meter. Met π gelijk aan afgerond 3,14 leidt dat tot een toename van de diameter van de band met afgerond 0,32 meter, hetgeen betekent dat de band de helft daarvan, dus afgerond 16 centimeter, van de aarde af komt te staan.

Inmiddels kennen wij π tot op meer dan 100 biljoen cijfers achter de komma. Dat zou ons bijna doen vergeten dat de zoektocht naar een zo goed mogelijke benadering van π duizenden jaren in beslag genomen heeft. De 'geboorte' van π vond naar schatting ongeveer 4000 jaar geleden plaats, toen de Babyloniërs ontdekten wat nu algemeen bekend is, maar wat geenszins vanzelfsprekend is, namelijk dat de diameter en de omtrek van een cirkel, hoe groot of hoe klein ook, zich altijd op dezelfde manier tot elkaar verhouden. Op kleitabletten gevonden in Babylonië blijkt dat uitgegaan werd van een waarde van π van $25/8$ (ofwel 3,125).

2. Onder een liniaal dient in deze te worden verstaan: een rechte lat zonder verdere aanduidingen.

Archimedes becijferde in de derde eeuw voor Christus dat π lag tussen $223/71$ (ofwel 3,140845) en $22/7$ (ofwel 3,142857), waarmee hij al behoorlijk dicht bij de werkelijke waarde van 3,141592... zat. Dat de zoektocht naar een zo goed mogelijke benadering van π ook in het verre oosten de aandacht trok, blijkt onder meer uit het feit dat de Chinees Zu Chongzhi, die leefde in de vijfde eeuw na Christus, $355/113$ als benadering van π vond. Dat is een prestatie van formaat want de benadering is nauwkeurig tot op zes cijfers achter de komma.

Inmiddels was ook bekend dat π niet alleen een rol speelt bij het bepalen van de omtrek van een cirkel, maar ook van de oppervlakte (OV) ervan door middel van de formule:

$OV = \pi \times R^2$, waarbij R gelijk is aan de straal van de cirkel.³

Tegenwoordig weten we dat π overal in de wiskunde opduikt, ook als er geen enkel verband met de cirkel lijkt te zijn. Zo nadert de reeks:

$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - \dots$ naar $\pi/4$ als de (oneven) noemer naar oneindig nadert, terwijl de reeks:

$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + 1/49 + \dots$ naar $\pi^2/6$ nadert als de (kwadratische) noemer naar oneindig nadert.

Het voert helaas te ver om in deze bijdrage uit te leggen hoe dat zit, maar de schoonheid van dergelijke formules – waarin geheel van de cirkel losstaande cijferreeksen op mysterieuze wijze gepaard worden aan de constante π – zal vermoedelijk ook de minder wiskundig onderlegde lezer kunnen bekoren.

4. VERSCHILLENDE SOORTEN GETALLEN

In de Griekse oudheid kende men uiteraard reeds de positieve gehele getallen. Men kende ook positieve breuken. Negatieve getallen, die men nu vanzelfsprekend acht, (er)kende men echter niet. De Oudgriekse wiskundige Diophantus vond in de derde eeuw na Christus de vergelijking $4x + 20 = 0$ een absurde vergelijking die geen oplossing had. De oplossing $x = -5$ accepteerde hij dus niet.

De eerste bronnen die negatieve getallen vermelden, zijn Chinese en Indiase geschriften van tussen de derde en zevende eeuw na Christus. In Europa bleven veel wiskundigen zich echter tot in de zeventiende eeuw verzetten tegen het concept van negatieve getallen. Ook het in Indiase bronnen uit de zevende eeuw voor

3. De straal is gelijk aan de helft van de diameter.

het eerst genoemde getal nul is pas vele eeuwen later door Europese wiskundigen omarmd.

In de vroegmoderne tijd ontwikkelde het getalbegrip zich steeds verder. Men ging de volgende verzamelingen onderscheiden:

N: de verzameling van alle natuurlijke getallen (0, 1, 2, 3, 4, ...)

Z: de verzameling van alle gehele getallen (dus inclusief de negatieve gehele getallen)

Q: de verzameling van alle rationale getallen (dat zijn alle getallen die als een breuk te schrijven zijn)

R: de verzameling van alle reële getallen (dat zijn in feite alle getallen die een normaal mens zich kan voorstellen, dus niet alleen de breuken maar ook de zogenoemde irrationale getallen, die niet als een breuk te schrijven zijn).

Rationale en irrationale getallen onderscheiden zich van elkaar doordat bij rationale getallen in decimale notatie, achter de komma een zich tot in het oneindige herhalend patroon gaat optreden, terwijl dat bij irrationale getallen niet het geval is. Neem als voorbeeld het getal: 0,142857 142857 142857... De zes cijfers 142857 blijven zich tot in het oneindige herhalen. Dan *moet* het dus wel een rationaal getal zijn. En dat is ook zo want het getal is gelijk aan $1/7$.

Omgekeerd: $\sqrt{2}$ laat zich in decimalen als volgt uitdrukken: 1,414123562373...

Tot in het oneindige is geen sprake van een repeterend patroon. En dus is $\sqrt{2}$ een irrationaal getal, met andere woorden: niet als een breuk te schrijven.

In 1761 bewees de Zwitser Johann Lambert dat ook π irrationaal is.

Met de bovengenoemde sets verzamelingen (N, Z, Q en R) is het palet nog niet compleet. Voor de onderhavige bijdrage zijn nog twee andere verzamelingen relevant: die van de algebraïsche getallen en die van de transcendente getallen.

Om te kunnen begrijpen wat een algebraïsch getal is, dient men eerst te weten wat een polynoom is. Een polynoom p is een veelterm in één variabele (meestal aangeduid als "x") van de vorm:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

De getallen a_0, a_1, a_2 etc. worden de coëfficiënten genoemd.

Voorbeelden zijn $1 - 2x + x^2$ en $6x - 5x^2 + x^3$

Een nulpunt van een polynoom vindt men door de vergelijking $p(x) = 0$ op te lossen. Zo heeft de vergelijking $1 - 2x + x^2 = 0$ als oplossing $x = 1$ en heeft de

vergelijking $6x - 5x^2 + x^3 = 0$ als oplossingen $x = 0$, $x = 2$ en $x = 3$, zoals de lezer zelf kan vaststellen door in te vullen.

Oplossingen kunnen ook irrationale getallen zijn. Zo heeft de vergelijking: $-2 + x^2 = 0$ als oplossingen $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$, beide irrationale getallen.

In alle gegeven voorbeelden zijn de coëfficiënten gehele getallen. De oplossingen (lees: de nulpunten van de betreffende polynomen) zijn rationale en irrationale getallen.⁴ Dat roept de vraag op of wellicht alle reële getallen als oplossing van een dergelijke vergelijking met gehele coëfficiënten kunnen optreden. Daarover heeft men zich in de wiskunde lang het hoofd gebroken. Getallen die als oplossing kunnen optreden noemt men algebraïsche getallen en alle overige getallen noemt men transcendent getallen. Maar of überhaupt wel transcendent getallen bestonden wist men lange tijd niet!

In 1844 bewees de Fransman Joseph Liouville als eerste het bestaan van een transcendent getal: 0,110001000000000000000001...

De constructie van dit getal is als volgt: gemeten vanaf de komma staat er een 1 op plek $n!$ (lees: n faculteit, met $n = 1, 2, 3$ etc.)⁵ en een 0 op alle overige plekken. Er staat dus een 1 op plek 1 ($=1!$), op plek 2 ($=2!=1 \times 2$), op plek 6 ($=3!=1 \times 2 \times 3$), op plek 24 ($=4!=1 \times 2 \times 3 \times 4$) etc. Liouville bewees dat dit getal nooit als nulpunt van een polynoom met gehele coëfficiënten kan optreden en dus transcendent is.

Transcendente getallen zijn een wonderlijk fenomeen. Het is extreem moeilijk om ze te vinden – daarom duurde het ook zo lang voordat er überhaupt een gevonden was – terwijl we tegenwoordig weten dat vrijwel alle reële getallen transcendent zijn en relatief gezien maar heel weinig getallen algebraïsch. Maar laten die algebraïsche getallen nu juist de getallen zijn die we in het dagelijks leven – en ook in de wiskunde die we op de middelbare school onderwezen krijgen – steeds tegenkomen! Het doet een beetje denken aan de donkere materie en donkere energie in het heelal die volgens de meest recente berekeningen ongeveer 95% van de totale massa en energie in het universum vormen, maar waarvan we tot op de dag van vandaag nog steeds niet weten waar ze zich nu eigenlijk precies bevinden.

5. MEETKUNDE EN ALGEBRA

Meetkunde en algebra zijn twee verschillende takken van de wiskunde, maar staan niet los van elkaar. Op de middelbare school leren we dat een verzameling reële

4. Gehele getallen zijn uiteraard ook rationale getallen.

5. $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.