

WISKUNDE VOOR BEDRIJFSECONOMEN

Boom



3E DRUK

HERBERT HAMERS

JOHN KLEPPE

BOB KAPER

Wiskunde voor bedrijfseconomen

Wiskunde voor bedrijfseconomen

Derde druk

Herbert Hamers

Bob Kaper

John Kleppe

Boom

Basisontwerp omslag: Dog & Pony, Amsterdam
Omslagontwerp: Coco Bookmedia, Amersfoort

© H. Hamers, B. Kaper, J. Kleppe & Boom uitgevers Amsterdam, 2020

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (art. 16 Auteurswet) kan men zich wenden tot de Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm or any other means without written permission from the publisher.

ISBN 978-90-2440-848-1
ISBN 978-90-2440-849-8 (e-book)
NUR 123/782

www.boomhogeronderwijs.nl

Voorwoord

Dit wiskundeboek is bedoeld voor de beginnende (bedrijfs)economiestudent. Het is gebaseerd op de ervaringen van vele jaren wiskundecolleges aan studenten van Tilburg University en lessen aan leerlingen op het vwo. Het boek herhaalt de wiskundestof van het vwo (elementaire rekentechnieken, functies, differentiëren), maar bouwt er ook op voort (partiële afgeleiden, (gebonden) optimalisering). Bij alles staat de economische toepassing centraal. Er worden vele voorbeelden gegeven uit de micro-economie, de moderne portefeuilletheorie, de theorie over voorraadmanagement en de statistiek. In deze nieuwe druk is een hoofdstuk toegevoegd met een grote set extra gemengde opgaven.

Bij dit boek hoort een **e-learningomgeving** waarin alle wiskundige onderwerpen nog eens worden uitgelegd door middel van tekst, meerkeuzevragen en films. Het adres van de e-learningomgeving is **www.wiskundeoptiu.nl/voor-bedrijfseconomen**.

Van alle opgaven in dit boek zijn de antwoorden opgenomen in de bijlage.

Dit boek zou niet tot stand zijn gekomen zonder de hulp van een groot aantal collega's die ons met raad en daad terzijde hebben gestaan. Met name willen we hier Ruud Brekelmans, Bart Husslage en Elleke Janssen noemen, die veel werk verricht hebben bij het tot stand komen van de e-learningomgeving. Verder nog extra dank aan Elleke voor haar hulp bij $\text{\LaTeX}$, in het bijzonder bij de lay-out en de figuren. Verder dank aan Marieke Quant en Jop Schouten voor hun bijdrage aan hoofdstuk 7.

Tot slot een opmerking over de gebruikte notatie. Gezien het internationale karakter van het huidige universitaire onderwijs (er is ook een Engelse versie van dit boek) wijken wij bewust af van de Nederlandse conventie om een komma te gebruiken als decimaalteken. In plaats daarvan hanteren we de in het Engels gebruikelijke punt.

Herbert Hamers
Bob Kaper
John Kleppe

Tilburg, december 2019

Inhoudsopgave

Voorwoord	v
Inleiding	xi
1 Functies van één variabele	1
1.1 Introductie van functies van één variabele	1
1.2 Overzicht van functies van één variabele	5
1.2.1 Polynoomfuncties	5
1.2.2 Machtfuncties	12
1.2.3 Exponentiële functies	16
1.2.4 Logaritmische functies	18
1.3 Toepassingen	21
1.3.1 Break-even	21
1.3.2 Marktevenwicht	22
1.4 Gemengde opgaven	24
2 Differentiëren van functies van één variabele	27
2.1 Afgeleide	27
2.2 Differentieerregels	37
2.3 Toepassingen	39
2.3.1 Marginaliteit	39
2.3.2 Elasticiteit	40
2.3.3 Snelheid productieproces	43
2.4 Kettingregel	44
2.5 Inverse functie	48
2.6 Toepassingen	53
2.6.1 Elasticiteit en inverse	53
2.7 Gemengde opgaven	54
3 Functies van twee variabelen	59
3.1 Introductie van functies van twee variabelen	59
3.2 Overzicht van functies van twee variabelen	61
3.3 Niveaukrommen	62
3.4 Toepassingen	65
3.4.1 Nutsfuncties en indifferentiekrommen	65
3.4.2 Moderne portefeuilletheorie	67
3.5 Gemengde opgaven	68

4	Differentiëren van functies van twee variabelen	71
4.1	Partiële afgeleiden	71
4.2	Toepassingen	77
4.2.1	Partiële marginaliteit	77
4.2.2	Partiële elasticiteit	79
4.3	Kettingregel	82
4.4	Raaklijn aan een niveaукromme	86
4.5	Toepassingen	89
4.5.1	Marginale substitutieverhouding	89
4.6	Gemengde opgaven	93
5	Optimaliseren	97
5.1	Optimaliseren van functies van één variabele	97
5.2	Toepassingen	109
5.2.1	Marginale-outputregel en productieregel	109
5.2.2	Aanbodfunctie van een producent	112
5.2.3	Voorraadmanagement	115
5.3	Optimaliseren van functies van twee variabelen	117
5.4	Toepassingen	123
5.4.1	Winstmaximalisatie producent	123
5.4.2	Regressielijn	125
5.5	Optimaliseren van gebonden extremumproblemen	129
5.5.1	Substitutiemethode	133
5.5.2	Eerste-ordecriterium voor een gebonden extremum	136
5.5.3	Eerste-ordevoorwaarde van Lagrange	140
5.6	Toepassingen	142
5.6.1	Nutsmaximalisatie consument	142
5.6.2	Kostenminimalisering producent	144
5.6.3	Selectie optimale portefeuille	147
5.7	Optimaliseren van convexe en concave functies	152
5.7.1	Convexe en concave functies van één variabele	152
5.7.2	Convexe en concave functies van twee variabelen	155
5.8	Gemengde opgaven	157
6	Oppervlakten en integralen	163
6.1	Integraal	163
6.2	Primitiveren	165
6.3	Oppervlakte en integraal	167
6.4	Toepassingen	177
6.4.1	Consumentensurplus	177
6.4.2	Kansverdelingen	179
6.5	Gemengde opgaven	181
7	Extra gemengde opgaven	185

A	Antwoorden opgaven	189
A.1	Antwoorden hoofdstuk 1	189
A.2	Antwoorden hoofdstuk 2	191
A.3	Antwoorden hoofdstuk 3	194
A.4	Antwoorden hoofdstuk 4	196
A.5	Antwoorden hoofdstuk 5	199
A.6	Antwoorden hoofdstuk 6	203
A.7	Antwoorden hoofdstuk 7	205
A.8	Figuren behorende bij de antwoorden	207
	Index	209

Inleiding

Deze inleiding geeft eerst een beknopt overzicht van de inhoud van dit boek. Vervolgens bespreken we de opbouw van het boek. Tot slot geven we een korte studeeraanwijzing.

In hoofdstuk 1 introduceren we functies van één variabele. Behalve een overzicht van elementaire functies komen ook het bepalen van nulpunten, oplossen van ongelijkheden en rekenen met machten aan bod.

Hoofdstuk 2 staat in het teken van de afgeleide van een functie van één variabele. Naast een aantal differentieerregels wordt ook de inverse functie besproken en in economische zin de begrippen marginaliteit en elasticiteit.

In hoofdstuk 3 introduceren we functies van twee variabelen en het begrip niveaukromme. Nutsfuncties van een consument en een eerste introductie in moderne portefeuilletheorie worden als economische toepassingen behandeld.

Partiële afgeleiden en partieel differentiëren staan centraal in hoofdstuk 4. Verder wordt het economische begrip marginale substitutieverhouding in verband gebracht met de raaklijn aan een niveaukromme.

Hoofdstuk 5 is geheel gewijd aan het bepalen van extrema van een functie, al dan niet onder nevenvoorwaarden. Als economische toepassingen komen onder andere winstmaximalisatie producent, het Economic Order Quantity model, de regressielijn, nutsmaximalisatie consument, kostenminimalisering producent en optimale investering in aandelen aan de orde. Daarnaast worden convexe en concave functies apart behandeld omdat deze functies in veel economische modellen gebruikt worden.

Tot slot wordt in hoofdstuk 6 het begrip integraal uitgelegd als middel om de oppervlakte van een gebied te bepalen. We gebruiken de integraal onder meer om het consumentensurplus te bepalen en voor het berekenen van kansen.

In dit boek is gekozen om de wiskundige en economische onderwerpen in aparte paragrafen te behandelen. In een wiskundige paragraaf volgen direct op de invoering van een wiskundig begrip of een wiskundige techniek een (wiskundig) voorbeeld en een opgave. Het voorbeeld is vaak een uitwerking of een toelichting van het betreffende begrip of van de wiskundige techniek; de opgave is een middel om het begrip of de techniek te doorgronden. Eenzelfde opmerking aangaande de opgaven kunnen we geven voor de economisch georiënteerde paragrafen.

Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een paragraaf gemengde opgaven. Van alle opgaven zijn de antwoorden opgenomen in de appendix.

Een eerste stap om wiskunde te leren begrijpen is door alle colleges die je universiteit aanbiedt te volgen. Echt begrijpen kun je wiskunde alleen maar door zelf de opgaven (proberen) te maken. Het zal niet altijd lukken om meteen elke opgave op te lossen. Dan is het raadzaam om nogmaals het voorbeeld dat direct voor de opgave staat te bestuderen. Als dit niet voldoende is, zul je nogmaals in de tekst van het boek

moeten duiken. Een andere optie is om gebruik te maken van de e-learningomgeving op www.wiskundeoportu.nl/voor-bedrijfseconomen. Hier worden de belangrijkste begrippen en technieken aan de hand van een voorbeeld door een docent uitgelegd. Verder is hier extra oefenmateriaal beschikbaar in de vorm van meerkeuzevragen. Als je alle opgaven in de tekst hebt doorgewerkt, dan maak je de paragraaf met gemengde opgaven. Deze opgaven bieden je de gelegenheid te controleren of je het hoofdstuk als geheel hebt begrepen.

1

Functies van één variabele

Functies worden vaak gebruikt om verbanden tussen (economische) variabelen te beschrijven. In dit hoofdstuk introduceren we het begrip functie van één variabele en geven we een overzicht van de klasse van polynoomfuncties, machtfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies. Bovendien komt een aantal algebraïsche basisvaardigheden aan bod, zoals het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden.

Lijst van begrippen

- Functie van één variabele
- Nulpunt van een functie
- Snijpunt van grafieken van functies
- Lineaire functie
- Kwadratische functie
- Polynoomfunctie
- Machtfunctie
- Exponentiële functie
- Logaritmische functie

1.1 Introductie van functies van één variabele

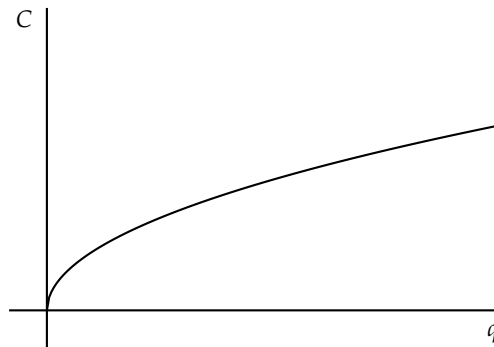
Voor het beschrijven van een verband tussen variabelen kunnen we gebruikmaken van het wiskundige begrip functie. In deze paragraaf introduceren we functies van één variabele.

We starten met een voorbeeld waarin we laten zien hoe we een functie kunnen gebruiken om het verband te beschrijven tussen de kosten en de hoeveelheid die geproduceerd wordt van een bepaald goed.

Voorbeeld 1.1: kostenfunctie

Een manager heeft onderzoek verricht om de kosten in kaart te kunnen brengen van een productieproces. Het resultaat van dit onderzoek is een verband tussen het productieniveau q en de bijbehorende kosten C , dat hij grafisch kan weergeven in een

assenstelsel (zie figuur 1.1). In dit assenstelsel geeft de horizontale as het productieniveau weer en de verticale as de bijbehorende kosten. Ofwel, de onafhankelijke variabele (het productieniveau) staat op de horizontale as en de afhankelijke variabele (de kosten) staat op de verticale as.



Figuur 1.1 De kostenfunctie van een productieproces.

Een grafisch verband tussen het productieniveau en de kosten is veelal niet toereikend. Een manager wil voor elk productieniveau q de bijbehorende kosten $C(q)$ exact weten. Dan is het handiger als het verband tussen het productieniveau en de kosten beschreven wordt door een functie: dat is een rekenvoorschrift dat voor elk toegelaten productieniveau q de kosten C berekent. Het rekenvoorschrift dat past bij de grafiek van figuur 1.1 is $\sqrt{q}$. Dit rekenvoorschrift geeft aan dat als het productieniveau q de waarde 9 heeft, de kosten $\sqrt{9} = 3$ zijn, dat als het productieniveau q de waarde 16 heeft, de kosten $\sqrt{16} = 4$ zijn, enzovoorts.

Steeds worden dus de kosten verkregen door het *rekenvoorschrift* $\sqrt{q}$ toe te passen op een waarde van het productieniveau q . Omdat we aan negatieve waarden van het productieniveau geen betekenis toekennen, beperken we de werking van het rekenvoorschrift tot de waarden van q groter of gelijk aan 0. We kunnen concluderen dat de variabelen C en q voldoen aan de vergelijking $C = \sqrt{q}$. We zeggen dat 'de kosten C een functie is van het productieniveau q '. ◀

Als de kosten C een functie is van het productieniveau q en we laten in het midden hoe het rekenvoorschrift eruitziet, dan noteren we het rekenvoorschrift als $C(q)$. Het verband tussen C en q wordt dan gegeven door de vergelijking $C = C(q)$. In het bovenstaande voorbeeld staat $C(q)$ dus voor $\sqrt{q}$.

Functies van één variabele

Een *functie van een variabele* x is een rekenvoorschrift $y(x)$ waarmee voor iedere toegelaten waarde van de variabele x precies één getal, de functiewaarde, wordt berekend.

De verzameling van alle toegelaten waarden D van x wordt aangeduid als het *definitiegebied* of het *domein* van de functie.

De verzameling van alle mogelijke functiewaarden wordt aangeduid als het *bereik* van de functie.

Als het definitiegebied D niet gegeven is bij een functie, dan bestaat het definitiegebied uit alle x waarvoor het functievoorschrift $y(x)$ uitvoerbaar is. Als er extra restricties worden opgelegd, dan wordt dit expliciet aangegeven. Een dergelijke restrictie, zoals niet-negativiteit van x , kan bijvoorbeeld voortkomen uit de economische interpretatie van het model.

De functiewaarden $y(x)$ kunnen we opvatten als de waarden van een variabele. Als we die variabele y noemen, dan voldoen y en x aan de vergelijking

$$y = y(x).$$

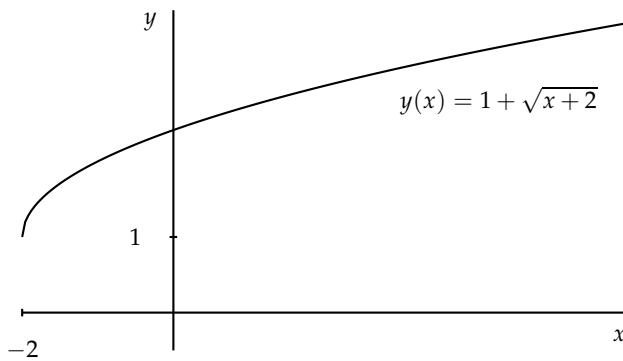
De variabele x in $y(x)$ wordt de *onafhankelijke, verklarende* of *inputvariabele* genoemd en de variabele y de *afhankelijke, te verklaren* of *outputvariabele*.

Functies en variabelen worden aangeduid met letters of combinaties van letters. Misschien ben je gewend variabelen aan te geven met de letters x , y of z en een functie met de letter f (dus $f(x)$ in plaats van $y(x)$, zodat $y = f(x)$). Maar in de economische theorie kiest men vaak voor een letter of een combinatie van letters die dicht aanligt tegen de betekenis van de variabele (p voor **p**rijs, L (van het Engelse '**L**abour') voor arbeid, K (van het Duitse '**K**apital') voor kapitaal, w (van het Engelse '**w**age') voor loon, enzovoort) of van het functievoorschrift (MC (van het Engelse '**M**arginal **C**ost') voor marginalekostenfunctie, AC (van het Engelse '**A**verage **C**ost') voor gemiddeldekostenfunctie, enzovoort).

De *grafiek* van een functie $y(x)$ is een figuur in een assenstelsel met twee assen, de x -as en de y -as, die is opgebouwd uit de punten met de coördinaten $(x, y(x))$. Het is gebruikelijk de onafhankelijke variabele x op de horizontale as uit te zetten en de afhankelijke variabele y op de verticale as.

Voorbeeld 1.2: grafiek van een functie

In figuur 1.2 is de grafiek getekend van de functie $y(x) = 1 + \sqrt{x+2}$. Het definitiegebied van $y(x)$ bestaat uit $x \geq -2$ en het bereik uit $y \geq 1$. In intervalnotatie is het domein $[-2, \infty)$ en het bereik $[1, \infty)$.



Figuur 1.2 De grafiek van de functie $y(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ in een (x, y) -assenstelsel.

Een snijpunt van de grafiek van de functie $y(x)$ met de x -as kan bepaald worden door het berekenen van een nulpunt van de functie $y(x)$.

Nulpunt van een functie van één variabele

Een *nulpunt* van een functie $y(x)$ is een oplossing van de vergelijking $y(x) = 0$.

Een nulpunt a van de functie $y(x)$ geeft een snijpunt $(a, 0)$ van de bijbehorende grafiek met de x -as.

Snijpunt van twee grafieken

Een snijpunt van de grafiek van een functie $y(x)$ met de grafiek van een andere functie $z(x)$ is een punt (a, b) waarvoor a een oplossing is van de vergelijking $y(x) = z(x)$ en $b = y(a) (= z(a))$.

Voor het bepalen van een snijpunt van de grafieken van de functies $y(x)$ en $z(x)$ wordt eerst de x -coördinaat van het snijpunt bepaald door de vergelijking

$$y(x) = z(x)$$

op te lossen. Vervolgens wordt de y -coördinaat gevonden door de gevonden x -coördinaat in te vullen in een van de twee functies.

Een snijpunt van de grafiek van functie $y(x)$ met de y -as wordt gevonden door de functiewaarde in $x = 0$ uit te rekenen. Dus een snijpunt met de y -as wordt gegeven door $(0, y(0))$.

Voorbeeld 1.3: nul- en snijpunten

Beschouw de functies $y(x) = -2x + 2$ en $z(x) = x - 4$. Het nulpunt van $y(x)$ is de oplossing van $y(x) = 0$,

$$\begin{aligned} y(x) = 0 &\Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Het punt $(1, 0)$ is dus het snijpunt van de grafiek van $y(x)$ met de x -as. Een snijpunt van de grafiek van $y(x)$ met de grafiek van $z(x)$ volgt uit een oplossing van de vergelijking $y(x) = z(x)$,

$$\begin{aligned} y(x) = z(x) &\Leftrightarrow -2x + 2 = x - 4 \\ &\Leftrightarrow -3x = -6 \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

De x -coördinaat van het snijpunt is dus $x = 2$. Door $x = 2$ in te vullen in de functie $y(x)$ vinden we dat de y -coördinaat gelijk is aan $y(2) = -2$. Merk op dat uiteraard ook $z(2) = -2$. Het snijpunt wordt dus gegeven door $(2, -2)$. Omdat $y(0) = 2$, snijdt de grafiek van $y(x)$ de y -as in het punt $(0, 2)$. ◀

In de volgende paragrafen van dit hoofdstuk bekijken we enkele elementaire functies van één variabele, tekenen we de bijbehorende grafieken, geven we enkele eigenschappen en berekenen we nulpunten en snijpunten.

1.2 Overzicht van functies van één variabele

1.2.1 Polynoomfuncties

In deze paragraaf beginnen we met een overzicht van constante, lineaire en kwadratische functies. Vervolgens geven we de algemene vorm van een polynoomfunctie. Tijdens dit overzicht komen ook het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden aan bod.

Constante functies

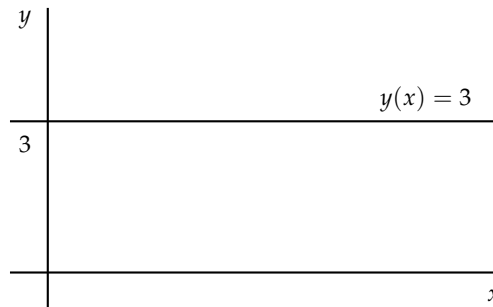
Een functie van de vorm

$$y(x) = c,$$

waarbij c een getal is, wordt een *constante functie* genoemd. Een constante functie heeft dus voor elke x dezelfde functiewaarde. Daarom is de grafiek van een constante functie een horizontale lijn.

Voorbeeld 1.4: grafiek van een constante functie

De functie $y(x) = 3$ is een voorbeeld van een constante functie en is getekend in figuur 1.3.



Figuur 1.3 De grafiek van de constante functie $y(x) = 3$.

Merk op dat een constante functie $y(x) = c$ geen nulpunt heeft als $c \neq 0$ en dat iedere x een nulpunt is als $c = 0$.

Lineaire functies

Een functie van de vorm

$$y(x) = ax + b,$$

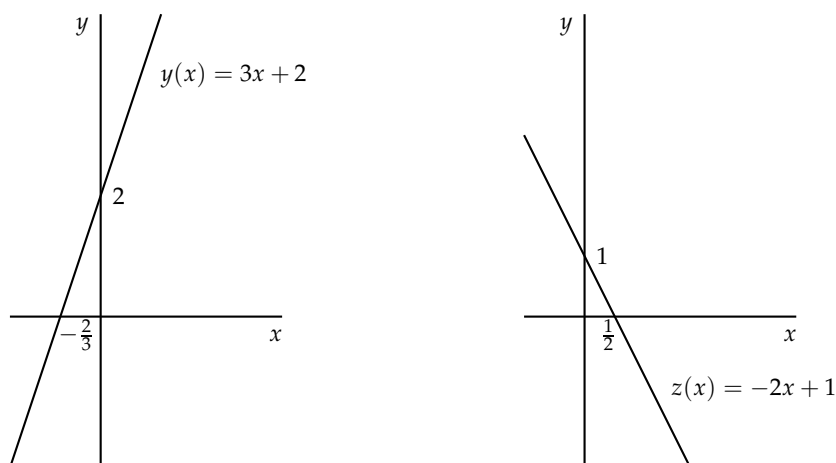
waarbij a en b getallen zijn ($a \neq 0$), wordt een *lineaire functie* genoemd. Merk op dat wanneer $a = 0$ de functie $y(x)$ een constante functie is. De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn. De *helling* van de lijn, ook wel *richtingscoëfficiënt* genoemd, wordt gegeven door het getal a . Bij een lineaire functie geeft de richtingscoëfficiënt aan hoeveel de functiewaarde verandert wanneer een input x met één eenheid toeneemt. Omdat bij een lineaire functie deze verandering dus altijd gelijk is aan a , geldt voor elke x

$$y(x+1) - y(x) = a.$$

Een lineaire functie heeft een positieve helling als $a > 0$ en een negatieve helling als $a < 0$. Merk op dat een constante functie een helling heeft gelijk aan 0.

Voorbeeld 1.5: grafiek van een lineaire functie

De grafieken van de lineaire functies $y(x) = 3x + 2$ en $z(x) = -2x + 1$ zijn getekend in figuur 1.4 in een (x, y) -assenstelsel. De helling van de grafiek van $y(x)$ is gelijk aan 3 en de helling van de grafiek van $z(x)$ is gelijk aan -2 .



*Figuur 1.4 De grafiek van de functie $y(x) = 3x + 2$ (links).
De grafiek van de functie $z(x) = -2x + 1$ (rechts).*

In het laatste voorbeeld van paragraaf 1.1 hebben we nulpunten en snijpunten uitgerekend voor lineaire functies. Voor lineaire functies is het eenvoudig een algemene formule af te leiden voor het snijpunt met de x -as en de y -as. Om het snijpunt van de grafiek van een lineaire functie $y(x) = ax + b$ met de x -as te bepalen, berekenen we het nulpunt van de functie $y(x)$,

$$\begin{aligned} y(x) = 0 &\Leftrightarrow ax + b = 0 \\ &\Leftrightarrow ax = -b \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Omdat een lineaire functie $y(x) = ax + b$ slechts één nulpunt heeft, heeft de grafiek ook maar één snijpunt met de x -as. Dus het snijpunt van de grafiek van een lineaire functie met de x -as is $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het snijpunt met de y -as wordt gevonden door $x = 0$ in het functievoorschrift in te vullen: $y(0) = b$. Dus het snijpunt met de y -as is $(0, b)$. Voor een lineaire functie $y(x) = ax + b$ kunnen we dus concluderen dat a de helling van de lijn weergeeft, het nulpunt gelijk is aan $-\frac{b}{a}$ en b de y -coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de y -as is.

■ Opgave 1.1 (nul- en snijpunt)

Beschouw de functies $y(x) = 3x + 2$ en $z(x) = -5x + 4$.

- Teken de grafieken van $y(x)$ en $z(x)$.
- Bepaal de nulpunten van elk van deze functies.
- Bepaal voor de grafiek van elk van deze functies het snijpunt met de x -as.
- Bepaal voor de grafiek van elk van deze functies het snijpunt met de y -as.
- Bepaal het snijpunt van de grafieken van deze functies.

Opgave 1.2 (helling van een lijn)

De grafiek van een lineaire functie $y(x) = ax + b$ gaat door de punten $(2, 4)$ en $(3, 9)$.

Bepaal a en b .

Kwadratische functies

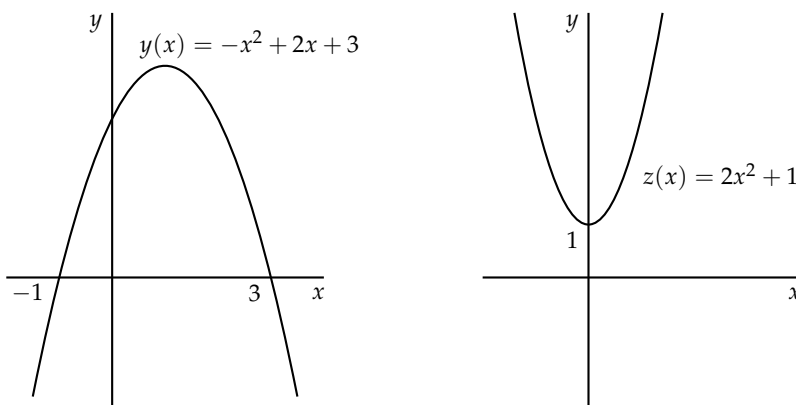
Een functie van de vorm

$$y(x) = ax^2 + bx + c,$$

waarbij a , b en c getallen zijn ($a \neq 0$) wordt een *kwadratische functie* genoemd. Merk op dat voor $a = 0$ de functie of lineair (als $b \neq 0$) of constant (als $b = 0$) is. De grafiek van een functie van de vorm $y(x) = ax^2 + bx + c$ is een parabool. Dit is een dalparabool als $a > 0$ en een bergparabool als $a < 0$.

Voorbeeld 1.6: grafieken van kwadratische functies

De grafieken van de kwadratische functies $y(x) = -x^2 + 2x + 3$ en $z(x) = 2x^2 + 1$ zijn getekend in figuur 1.5. De grafiek van de functie $y(x)$ is een bergparabool omdat de coëfficiënt voor x^2 gelijk is aan -1 (negatief), en de grafiek van $z(x)$ is een dalparabool omdat de coëfficiënt voor x^2 gelijk is aan 2 (positief).



Figuur 1.5 De grafiek van de functie $y(x) = -x^2 + 2x + 3$ is een bergparabool (links). De grafiek van de functie $z(x) = 2x^2 + 1$ is een dalparabool (rechts).

De snijpunten van de grafiek van een kwadratische functie $y(x) = ax^2 + bx + c$ met de x -as worden bepaald door het oplossen van de kwadratische vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Een kwadratische vergelijking kunnen we oplossen door gebruik te maken van de *abc-formule*. Hierin speelt de *discriminant* een belangrijke rol. De discriminant van de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is gelijk aan $b^2 - 4ac$ en wordt genoteerd met D ,

$$D = b^2 - 4ac.$$

Een kwadratische vergelijking heeft twee, één of nul oplossingen, afhankelijk van de waarde van de discriminant. De oplossingen van een kwadratische vergelijking worden weergegeven in het volgende discriminantencriterium.

Discriminantencriterium en *abc*-formule voor een kwadratische vergelijking

Voor een kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ geldt voor $D = b^2 - 4ac$ het volgende:

(i) als $D > 0$, dan zijn de oplossingen van de kwadratische vergelijking

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(ii) als $D = 0$, dan is de oplossing van de kwadratische vergelijking

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

(iii) als $D < 0$, dan heeft de kwadratische vergelijking geen oplossingen.

Voorbeeld 1.7: nulpunten van een kwadratische functie

Beschouw de functie $y(x) = -x^2 + 2x + 3$. Een nulpunt van $y(x)$ is een oplossing van de vergelijking

$$-x^2 + 2x + 3 = 0.$$

De discriminant $D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$. Omdat $D > 0$ krijgen we volgens de *abc*-formule de volgende twee oplossingen:

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = -1 \quad \text{en} \quad x = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = 3.$$

De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(3, 0)$, zoals ook te zien is in figuur 1.5. 

Opgave 1.3 (nulpunten van een kwadratische functie)

Bepaal de nulpunten van elk van de volgende kwadratische functies:

a) $y(x) = x^2 + 7x + 6$.

b) $y(x) = 4x^2 + 2x + 1$.

Opgave 1.4 (grafiek van een kwadratische functie)

Beschouw de twee functies $y(x) = x^2 + 4x + 3$ en $z(x) = -x^2 + 6$.

- Teken de grafiek van de functies $y(x)$ en $z(x)$.
- Bereken de snijpunten van de grafieken van deze functies.

Wanneer we twee functies beschouwen zijn niet alleen de snijpunten interessant, maar ook de waarden van x waarvoor de functiewaarde van één functie groter of kleiner is dan de functiewaarde van de andere functie. Om dit soort vraagstukken op te lossen moeten we ongelijkheden oplossen. Voor het oplossen van de ongelijkheid $f(x) \geq g(x)$ gebruiken we het volgende stappenplan.

Oplossen ongelijkheid $f(x) \geq g(x)$

- Stap 1. Definieer de functie $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Stap 2. Bepaal de nulpunten van $h(x)$.
- Stap 3. Maak een tekenoverzicht van $h(x)$.
- Stap 4. Lees in het tekenoverzicht af waar $h(x) \geq 0$.

Conclusie: De waarden waarvoor $h(x) \geq 0$ zijn dezelfde als waarvoor $f(x) \geq g(x)$.

Het spreekt vanzelf dat op soortgelijke wijze de ongelijkheden $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ en $f(x) < g(x)$ opgelost kunnen worden. In het volgende voorbeeld illustreren we het stappenplan voor het oplossen van een ongelijkheid.

Voorbeeld 1.8: ongelijkheden oplossen

Beschouw de functies $f(x) = x^2 + 2$ en $g(x) = -3x$. We willen alle waarden van x bepalen waarvoor $f(x) \geq g(x)$.

Stap 1. Definieer de functie $h(x) = f(x) - g(x)$.

We krijgen $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2 - (-3x) = x^2 + 3x + 2$.

Stap 2. Bepaal de nulpunten van $h(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ of } x = -2, \end{aligned}$$

waarbij de oplossingen zijn gevonden door gebruik te maken van de *abc*-formule.

Stap 3. Maak een tekenoverzicht van $h(x)$.

Het tekenoverzicht van $h(x)$ wordt verkregen door de nulpunten op een rechte lijn te zetten. Dit verdeelt de lijn in drie intervallen: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$ en $(-1, \infty)$. De functiewaarden van $h(x)$ in één interval hebben allemaal hetzelfde teken. Dit betekent dat alle functiewaarden allemaal positief of allemaal negatief zijn in het betreffende interval. Dus, door een willekeurige waarde te kiezen in $(-\infty, -2)$ kunnen

Wiskunde voor bedrijfseconomen is speciaal bestemd voor de beginnende student (bedrijfs)economie in het universitair onderwijs. Het herhaalt belangrijke wiskundestof van het vwo en bouwt erop voort. Daarbij staat de economische toepassing steeds centraal. In aparte paragrafen komen vele voorbeelden aan bod uit de micro-economie, de moderne portefeuilletheorie, de theorie over voorraadmanagement en de statistiek. Een terugkerend thema in deze voorbeelden is het begrip 'optimaliseren'.

Om de stof goed te doorgronden bevat het boek een groot aantal oefenopgaven. Daarnaast is er een vrij toegankelijke e-learningomgeving waarin de stof uit het boek nog eens wordt uitgelegd met behulp van tekst, meerkeuzevragen en films. Boek en e-learning zorgen zo samen voor een stevige wiskundige basis onder je studie (bedrijfs)economie.

Prof. dr. Herbert Hamers is hoogleraar Speltheorie en Operations Research aan Tilburg University. Dr. Bob Kaper is in het verleden verbonden geweest als universitair hoofddocent wiskunde aan Tilburg University. Dr. John Kleppe was als wiskundedocent eveneens verbonden aan Tilburg University.

Dit boek is ook verkrijgbaar in een Engelstalige versie van dezelfde auteurs: *Mathematics for Business Economics* (ISBN: 9789024428427).



9 789024 408481 >

www.boomhogeronderwijs.nl