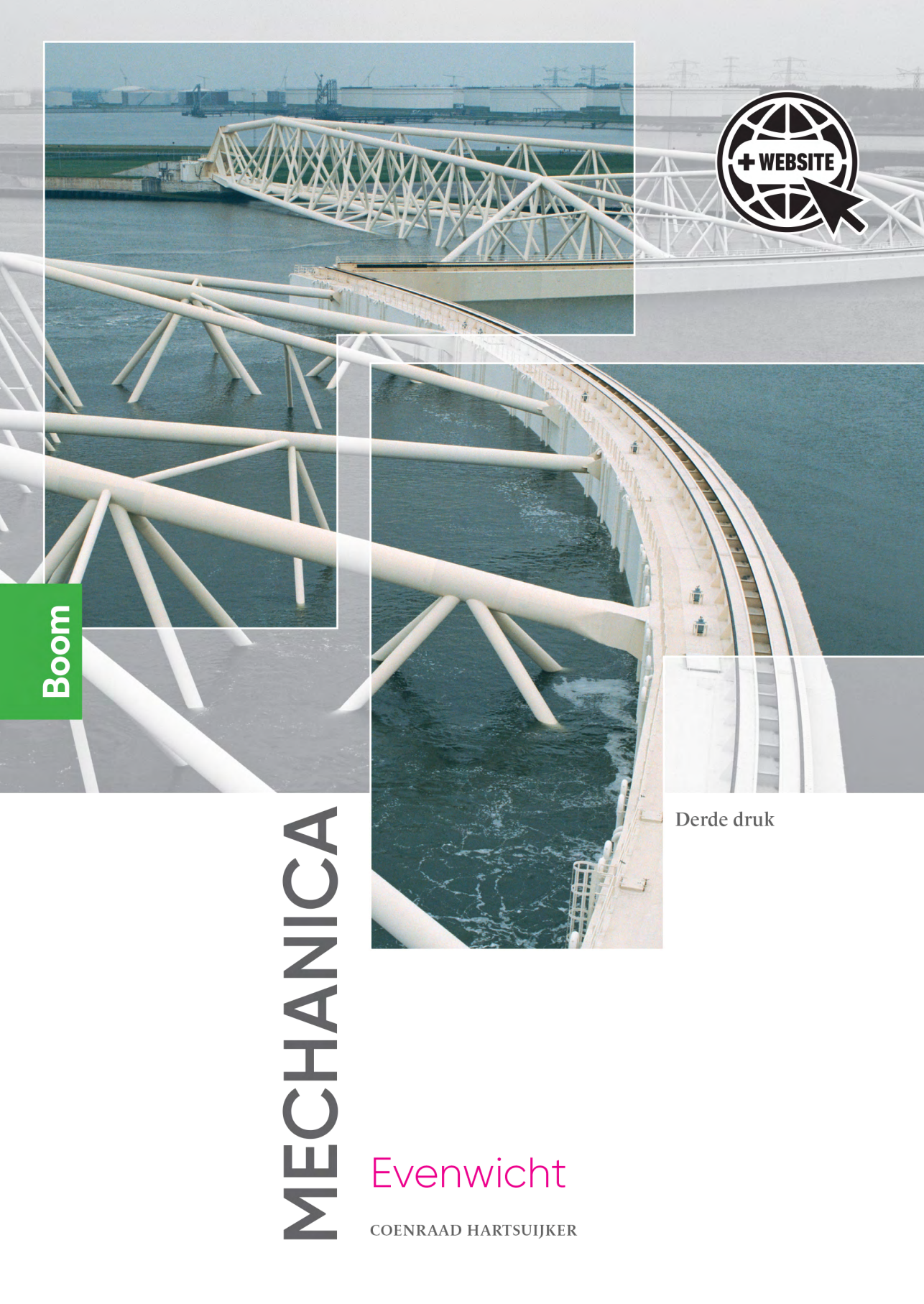




Boom

MECHANICA

Evenwicht

COENRAAD HARTSUIJKER

Derde druk

Mechanica

Evenwicht

3^e druk

Coenraad Hartsuijker

Boom

**inclusief
website!**

Met behulp van onderstaande unieke activeringscode krijg je toegang tot de website www.mechanicaevenwicht.nl voor extra materiaal. Deze code is persoonsgebonden en gekoppeld aan de derde druk. Na activering van de code is de website 3 jaar toegankelijk. De code kan tot zes maanden na het verschijnen van een volgende druk geactiveerd worden.

De code is eenmalig te gebruiken.

Op het gebied van mechanica en sterkteleer zijn bij Boom uitgevers Amsterdam de volgende uitgaven beschikbaar:

- C. Hartsuijker. *Mechanica: Evenwicht*
- C. Hartsuijker. *Mechanica: Spanningen, vervormingen verplaatsingen*
- C. Hartsuijker & J.W.Welleman. *Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse*

Opmaak binnenwerk: Heymans & Vanhove, Goes

Basisontwerp omslag: Dog & Pony, Amsterdam

Omslagontwerp: Haagsblauw, Den Haag

Foto omslag: Maeslantkering bij Hoek van Holland

Credits: <https://beeldbank.rws.nl>, Rijkswaterstaat / Henri Cormont

© 2019 Hartsuijker & Boom Uitgevers Amsterdam, 3^e druk

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden veeleelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische veeleelvoudingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (art. 16 Auteurswet) kan men zich wenden tot de Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm or any other means without written permission from the publisher.

ISBN 9789024429257

ISBN 9789024429264 (e-book)

NUR 123 / 929

www.mechanicaevenwicht.nl

www.boomhogeronderwijs.nl

Woord vooraf van de uitgever

Dit boek is het eerste deel uit een serie leerboeken over toegepaste Mechanica, waarin een helder en compleet beeld wordt gegeven van de theorie en toepassingen van de mechanica van constructies in de bouwkunde en weg- en waterbouwkunde/civiele techniek.

De serie bestaat uit drie boeken:

- 1 Evenwicht
- 2 Spanningen, vervormingen en verplaatsingen
- 3 Statisch onbepaalde Constructies en Bezwijkanalyse

Het is niet noodzakelijk deel 1 volledig af te ronden om aan deel 2 te kunnen beginnen. Als de onderwijssituatie daarom vraagt kunnen de delen 1 en 2 gedeeltelijk ook parallel aan elkaar worden behandeld.

De inhoud is het resultaat van een jarenlange ervaring met het mechanicaonderwijs aan de Technische Universiteit Delft en het commentaar van vele collega's in de onderwijssector en generaties studenten. Niet voor niets hebben deze dictaten binnen én buiten de Technische Universiteit Delft al lange tijd een goede reputatie. Bovendien hebben vele docenten mechanica van de jongere generatie het mechanica vak tijdens hun opleiding bestudeerd aan de hand van deze dictaten. Mede hierdoor wordt een aantal van deze dictaten reeds aan verschillende HBO-opleidingen gebruikt.

De inhoud van deze dictaten is gebundeld tot een drietal leerboeken, waardoor het resultaat van deze rijke onderwijservaring voor een veel grotere groep toegankelijk wordt als ondersteuning bij het mechanica-onderwijs in zowel het HBO als bij de Technische Universiteiten.

Bij de opzet is gezocht naar een fundamentele aanpak zonder daarbij de relatie met de bouwpraktijk te verliezen. Het grote aantal uitgewerkte voorbeelden in de tekst, alsmede de vele vraagstukken (beschikbaar via de webpagina bij dit boek op www.mechanicaevenwicht.nl) maken van dit boek een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen en oefenen van het vak Toegepaste Mechanica.

Woord vooraf van de auteur

Dit boek is bestemd voor HBO- en TU-studenten en verder voor iedereen die kennis wil maken met de eerste beginselen van de Toegepaste Mechanica. Het is het eerste deel uit een serie van drie en behandelt het thema 'Evenwicht'. De inhoud is voor een belangrijk deel gebaseerd op dictaten die werden ontwikkeld voor het onderwijs in het eerste en tweede studiejaar aan de faculteit Civiele Techniek, thans Civiele Techniek en Geowetenschappen, van de Technische Universiteit Delft.

In de eerste hoofdstukken wordt, na een algemene inleiding, eerst het evenwicht van een puntdeeltje behandeld en daarna dat van een star lichaam. Hierna wordt de opbouw van een constructie bekeken, met zijn oplettingen en zijn constructie-elementen en verbindingen tussen de constructie-elementen. Vervolgens wordt in hoofdstuk 5 aan de hand van een groot aantal uitgewerkte rekenvoorbeelden ingegaan op het berekenen van de oplegreacties en verbindingskrachten bij verschillende typen staafconstructies.

De belasting bestaat tot dan toe alleen nog maar uit puntlasten. In de volgende hoofdstukken komen daar de verdeelde belastingen bij. Ook gas-, vloeistof- en gronddrukken komen aan bod. Het volgende onderwerp is de krachtsverdeling binnen een constructie. Als eerste worden vakwerken behandeld, waar de staven alleen maar door normaalkrachten worden belast (extensie). Hierna wordt overgestapt naar het algemene geval (buiging en extensie) en worden voor een klein staafelementje de evenwichtsbetrekkingen tussen snedekrachten en belasting afgeleid. Vervolgens wordt hieruit een methodiek ontwikkeld om op snelle wijze de M -, V - en N -lijnen te kunnen schetsen of deze op hun juistheid te kunnen controleren. Hoofdstuk 13 bevat hiervan een groot aantal uitgewerkte rekenvoorbeelden.

In het hierop volgende hoofdstuk over kabels wordt onder meer gewezen op de overeenkomst tussen momentenlijn, kabelvorm en vaak ook constructievorm.

Het boek wordt afgesloten met de onderwerpen virtuele arbeid en invloedslijnen. Het beginsel van

virtuele arbeid geeft een alternatieve formulering van de evenwichtsvergelijkingen en past daarom binnen het kader van dit boek. Bij het tekenen van invloedslijnen (voor krachtengrootheden in statisch bepaalde constructies) blijkt het beginsel van virtuele arbeid inderdaad een zeer handig alternatief voor de evenwichtsvergelijkingen te bieden.

Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een serie vraagstukken. In met name de hoofdstukken

5 'Berekenen van oplegreacties en verbindingskrachten' en 13 'Rekenvoorbeelden M-, V- en N-lijnen' is een groot aantal voorbeelden en vraagstukken opgenomen waarin de theorie uit voorgaande hoofdstukken samenkomt in meer samengestelde problemen.

De benodigde voorkennis op het gebied van de wiskunde is beperkt. Enkele regels uit de vectoranalyse zijn samengevat in hoofdstuk 1. Voor een goed begrip van enkele afleidingen is verder enige kennis vereist op het gebied van de differentiaal- en integraalrekening.

De tekst wordt ondersteund door een zeer groot aantal figuren en is zo opgeschreven dat HBO- en TU-studenten zich de lesstof in principe zelfstandig eigen kunnen maken.

Het boek zal echter nooit de docent kunnen vervangen. In het onderwijsproces is de docent een onmisbare katalysator. Door de docent kan dit proces, gericht op het verwerven van kennis, inzicht en vaardigheid, in belangrijke mate worden versneld. Zo zou de docent aan de hand van de figuren uit het boek het verhaal in grote lijnen kunnen vertellen, waarna de student een en ander nog eens zelf kan nalezen – en dan blijkt dat vaak veel gemakkelijker en sneller te gaan dan men in eerste instantie zou verwachten. Maar ook andere werkwijzen zijn denkbaar.

Ondanks de hiervoor beschreven en welbewust gekozen opbouw van het boek zijn er voldoende mogelijkheden om zonder problemen bepaalde delen over te slaan als het onderwijsprogramma daar om vraagt of als de docent dat wenselijk acht. Daarnaast biedt het grote aantal vraagstukken de docent de gelegenheid een eigen aanvullende onderwijsstrategie te ontwikkelen.

Onder de vraagstukken bevindt zich een groot aantal kleine opgaven die zich bij uitstek lenen voor oefening in groepsverband, tijdens de les. De grotere vraagstukken, meestal opgesplitst in deelvragen, zijn eerder bedoeld als opdrachten die individueel of in kleine groepjes moeten worden uitgevoerd. Samenwerking tussen de studenten dient daarbij te worden aangemoedigd: het aan elkaar vertellen wat je niet begrijpt is net zo leerzaam als het aan elkaar vertellen wat je wel begrijpt. Bovendien wordt de student zo uitgedaagd zelf te ontdekken dat er vaak meerdere wegen zijn die tot het gevraagde resultaat leiden.

Een beter inzicht en grotere vaardigheid is alleen te bereiken door veel en regelmatig te oefenen. Voor een goede afstemming en dosering is ook hier weer de hand van de meester nodig: de docent.

Prof. ir. D. Dicke dank ik voor de opgaven die hij ter beschikking stelde. Met plezier denk ik terug aan de vele inspirerende gesprekken over het onderwijs, de mechanica en het onderwijs in de mechanica in het bijzonder. Ir. Charles Vrijman dank ik voor zijn nimmer aflatende collegiale steun.

Een bijzonder woord van dank geldt de oud-studentassistenten ir. Harm Askes en Sandra Faessen voor het kritisch doornemen van het manuscript.

Nootdorp, zomer 1999

C. Hartsuijker

Woord vooraf van de auteur bij de 2^e en 3^e druk

Op verzoek van de uitgever is het oblong formaat ingewisseld voor een staand formaat, waarbij er opnieuw naar is gestreefd tekst en bijbehorende figuren op twee naast elkaar gelegen pagina's te houden. De series vraagstukken waarmee de hoofdstukken werden afgesloten zijn niet meer in het boek opgenomen, maar beschikbaar via www.mechanicaevenwicht.nl.

Bij de 3^e druk is daarnaast ook kleur toegevoegd.

Nootdorp, voorjaar 2015, voorjaar 2020

C. Hartsuijker

Inhoud

1	Inleiding	1
1.1	Mechanica	1
1.2	Grootheden, eenheden, dimensies	7
1.3	Vectoren	9
1.4	Wetten van Newton	14
2	Statica van een puntdeeltje	17
2.1	Krachten in het platte vlak	17
2.2	Krachten in de ruimte	23
2.3	Evenwicht van een puntdeeltje	26
3	Statica van een star lichaam	29
3.1	Krachten en momenten in een plat vlak	29
3.2	Evenwicht van een star lichaam in een plat vlak	44
3.3	Krachten en momenten in de ruimte	51
3.4	Evenwicht van een star lichaam in de ruimte	60
4	Constructies	65
4.1	Constructie-elementen	66
4.2	Verbindingen tussen constructie-elementen	69
4.3	Opleggingen	72
4.4	Vlakke staafconstructies	79
4.5	Kinematisch/statisch (on)bepaaldheid van constructies	83
5	Berekenen van oplegreacties en verbindingskrachten	97
5.1	Vormvaste constructies	97
5.2	Scharnierliggers	106
5.3	Driescharnierenspanten	110
5.4	Driescharnierenspanten met trekstang	115
5.5	Geschoorde constructies	118
5.6	Versterkte liggers	128
5.7	Hang- en springwerken	131
6	Belastingen	135
6.1	Belastingen in de mechanica	135
6.2	Belastingen in de voorschriften	139
6.3	Werken met verdeelde belastingen	146
6.4	Schematiseren van de belastingafdracht	157
6.5	Spanningsbegrip; normaal- en schuifspanning	159
7	Gas- en vloeistofdrukken	163
7.1	Wet van Pascal; alzijdige druk	163
7.2	Werken met gasdrukken	165
7.3	Werken met vloeistofdrukken	172
7.4	Samenvatting	183
8	Gronddrukken	185
8.1	Spanningen in grond	185
8.2	Verticale gronddrukken	188
8.3	Horizontale gronddrukken	191
9	Vakwerken	205
9.1	Vlakke vakwerken	206
9.2	Kinematisch/statisch (on)bepaalde vakwerken	214
9.3	Berekenen van staafkrachten	223
10	Snedekrachten	255
10.1	Krachtsoverdracht in een staaf	255
10.2	Normaalkrachtenlijn, dwarskrachtenlijn en momentenlijn	270
10.3	Vervormingstekens voor dwarskracht en buigend moment	283
10.4	Samenvatting tekenafspraken voor N -, V - en M -lijn	287

11	Wiskundige beschrijving van het verband tussen snedekrachten en belasting	289
11.1	Differentiaalbetrekkingen voor het evenwicht	289
11.2	Wiskundige uitwerking van het verband tussen N en q_x (extensie)	292
11.3	Wiskundige uitwerking van het verband tussen M , V en q_z (buiging)	295
12	Momenten-, dwarskrachten-en normaalkrachtenlijnen	307
12.1	Regels om de V - en M -lijn sneller te kunnen tekenen	307
12.2	Regels om de N -lijn sneller te kunnen tekenen	329
12.3	Geknikte en samengestelde staafconstructies	330
12.4	Beginsel van superpositie	339
12.5	Schematisering en werkelijkheid	342
13	Rekenvoorbeelden M-, V- en N-lijnen	349
13.1	Vormvaste constructies	349
13.2	Samengestelde en daarmee verwante constructies	382
13.3	Statisch onbepaalde constructies	389
14	Kabel, krachtlijn en constructievorm	401
14.1	Kabels	401
14.2	Krachtpunt en krachtlijn	430
14.3	Relatie tussen kabel, krachtlijn en constructievorm	435
15	Virtuele arbeid	449
15.1	Arbeid en vormveranderingsenergie	449
15.2	De virtuele arbeidsvergelijking voor een puntdeeltje	452
15.3	De virtuele arbeidsvergelijking voor een star lichaam	456
15.4	De virtuele arbeidsvergelijking voor een mechanisme	459
15.5	Berekenen van krachten met behulp van virtuele arbeid	462
16	Invloedslijnen	471
16.1	Invloedslijnen via een directe evenwichtsbeschouwing	471
16.2	Invloedslijnen met behulp van virtuele arbeid	475
16.3	Werken met invloedslijnen	481
	Illustratieverantwoording	487
	Trefwoordenregister	495

1

Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een aantal definities en begripsbepalingen gegeven.

Na een korte beschrijving van het vakgebied van de mechanica in paragraaf 1.1, wordt in paragraaf 1.2 aandacht besteed aan het karakter van een aantal belangrijke grootheden uit de mechanica en de eenheden waarin zij worden uitgedrukt. Grootheden met een grootte en richting die voldoen aan de zogenaamde parallelogramregel worden vectoren genoemd. De vector is het onderwerp in paragraaf 1.3.

De drie bewegingswetten van Newton en de eveneens door Newton geformuleerde gravitatiewet waren een belangrijke stap vooruit in de ontwikkeling van de mechanica. Deze wetten komen aan het einde van het hoofdstuk in paragraaf 1.4 aan de orde.

1.1 Mechanica

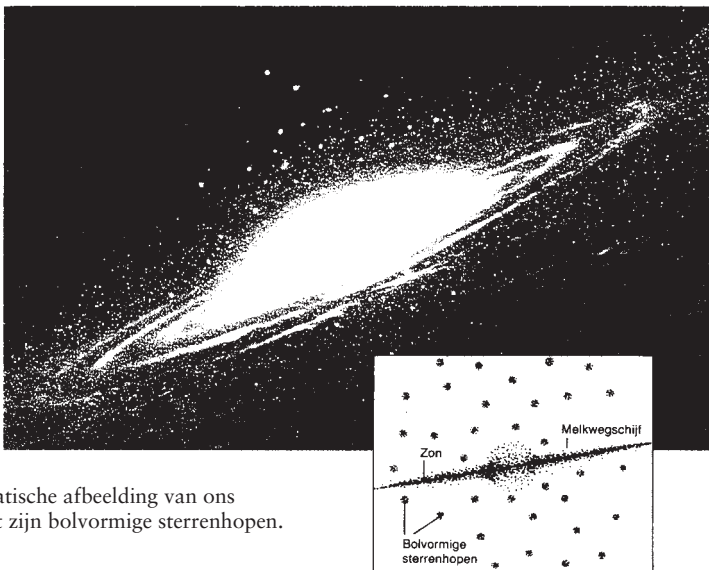
1.1.1 Voorbeelden uit het vakgebied van de mechanica

Mechanica is het onderdeel van de natuurkunde waarin men zich bezighoudt met het evenwicht en de beweging van materie.

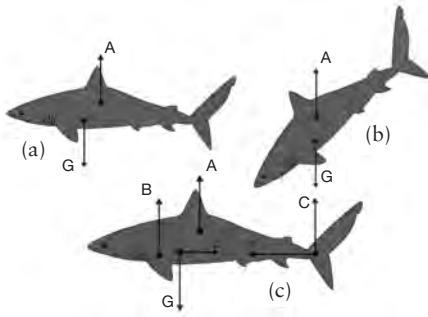
Tot de mechanica behoren onder meer:

- De beschrijving van de beweging van natuurlijke en kunstmatige hemellichamen.

Figuur 1.1 geeft een schematische afbeelding van ons melkwegstelsel. Het overgrote deel van alle sterren bevindt zich in een platte schijf. Boven en onder deze schijf bevinden zich zo'n 200 bolvormige sterrenhopen die zich in ellipsvormige banen om de kern van het melkwegstelsel bewegen.

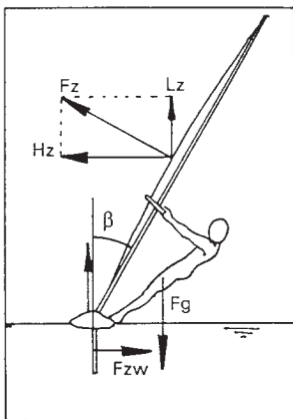


Figuur 1.1 Schematische afbeelding van ons melkwegstelsel met zijn bolvormige sterrenhopen.



Figuur 1.2 De krachten op een zwemmende haai.

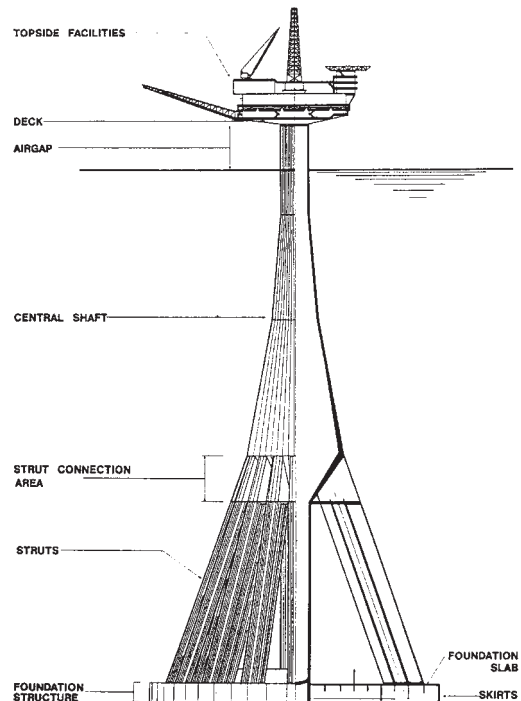
- De berekening van de krachten op een zwemmende haai.
Op de haai in rust in figuur 1.2a werken het eigen gewicht G en de door de waterdruk veroorzaakte opwaartse kracht A . Hierdoor kantelt het dier, zie figuur 1.2b. Als de staart een stuwkracht opwekt ontstaan er verticale krachten die de haai in verticaal evenwicht houden, zie figuur 1.2c.
- Het balanceren op een surfplank, zie figuur 1.3.
- De berekening van de vervorming van een olieplatform op zee onder invloed van golfaanval.



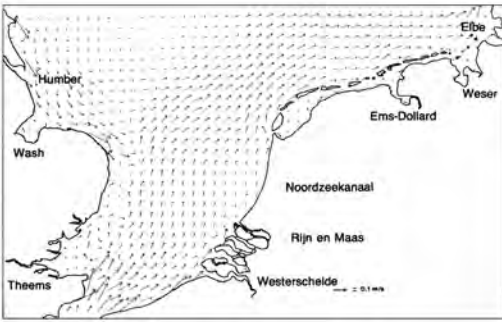
Figuur 1.3 Een surfer balancerend op zijn plank.

Figuur 1.4 toont een betonnen platform ontworpen voor het Noorse Trollveld met een waterdiepte van 340 m. De bodem bestaat uit zeer slappe klei. Het zeeklimaat is zeer ruig met golven van meer dan 10 meter. De massa van het dek bedraagt 60 000 ton (60×10^6 kg).

- De beschrijving van de stroming van water in een rivier, zeearm of zee.
In figuur 1.5 is een stromingsmodel voor de Noordzee gegeven. De pijltjes geven voor bepaalde gebieden de stroomrichting en stroomsterkte aan. Dergelijke modellen kan men bijvoorbeeld gebruiken om de verspreiding van giftige stoffen te onderzoeken.
- Het spanningsonderzoek in prothesen, zoals een kunsthand, heupgewricht of kniegewricht. Bij de knieprothese in figuur 1.6 is de aanhechting van de prothese aan het bot van



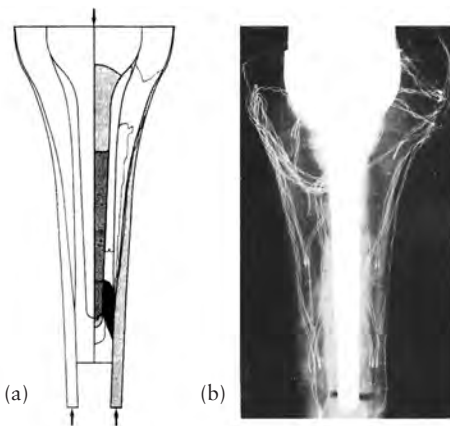
Figuur 1.4 Ontwerp van een betonnen platform in 340 m diep water.



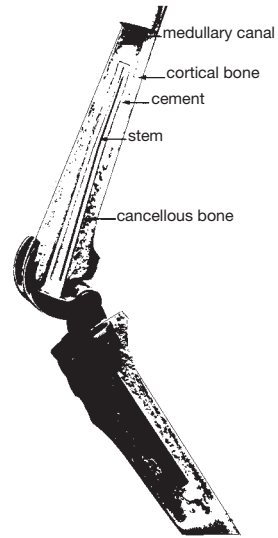
Figuur 1.5 Een stromingsmodel voor de Noordzee.

groot belang. In figuur 1.7a is met grijsstinten de grootte van de spanningen volgens een rekenmodel aangegeven. Nabij het uiteinde van de prothese treden grote trekspanningen op (het zwarte gebied). Deze spanningen kunnen leiden tot breuk in het cement (aanhechtmiddel) zoals is te zien op de röntgenfoto in figuur 1.7b.

- Het zoeken naar de juiste vorm van een hoge toren om de belasting door wind en eigen gewicht op een doelmatige wijze naar de fundering over te brengen.



Figuur 1.7 In de modellering van de knieprothese (a) is met grijsstinten de grootte van de spanningen volgens een rekenmodel aangegeven. De grootste trekspanning treedt op in het zwarte gebied nabij het uiteinde van de prothese. De röntgenfoto (b) laat op die plaats breuk in het cement zien.

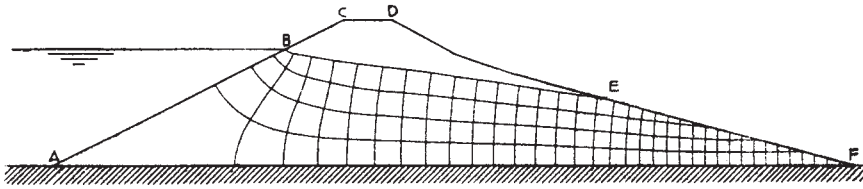


Figuur 1.6 Opengewerkte knieprothese.

Figuur 1.8 toont de in 1889 voltooide 300 m hoge Eiffeltoren, de eerste toren van 1000 voet, gebouwd ter gelegenheid van de Wereldtentoonstelling van 1889 in Parijs. De toren is uitgevoerd in smeedijzer.



Figuur 1.8 De Eiffeltoren (1889) was de eerste toren ter wereld van 1000 voet hoog.



Figuur 1.9 Stroomlijnen en potentiaallijnen in een dam op waterdichte ondergrond.

- De stroming van water door een dam.
In figuur 1.9 zijn voor een dam op een waterdichte ondergrond zogenaamde stroomlijnen en potentiaallijnen getekend. Zij staan loodrecht op elkaar en vormen een vierkantennet. Het gedeelte EF van het talud noemt men het kweloppervlak. Het water treedt hier uit het talud en stroomt langs het talud naar beneden.
- Het sluiten van de Maeslantkering, zie figuur 1.10.
De Maeslantkering, de stormvloedkering in de Nieuwe Waterweg, bestaat uit twee 22 m hoge sectordeuren in de vorm van een cirkelboog met een booglengte van 214 m. De deuren worden in drijvende toestand vanuit dokken naar elkaar toe gedraaid. In gesloten toestand worden de deuren door het inlaten van water op een drempel afgezonken. De waterdruk op de deuren wordt via twee 260 m lange vakwerkarmen afgevoerd naar twee funderingsblokken. De verbinding tussen vakwerkarm en funderingsblok is een bolscharnier met een diameter van 10 m.

1.1.2 Indeling van de mechanica

Het uitgebreide gebied van de mechanica kan op verschillende manieren worden onderverdeeld.

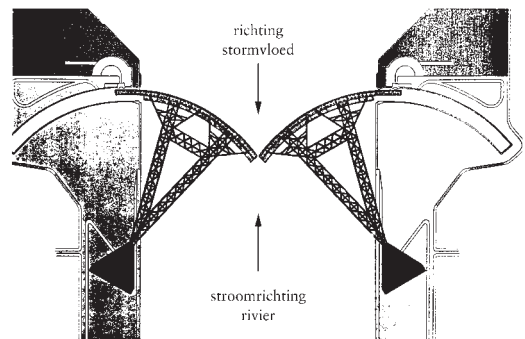
Een indeling waarop reeds in de omschrijving van het vakgebied werd gedoeld, is die vanuit het gezichtspunt van rust of beweging:

- *Statica* (evenwichtsleer) of de studie van materie die in rust is.
- *Dynamica* (bewegingsleer) of de studie van materie die in beweging is.

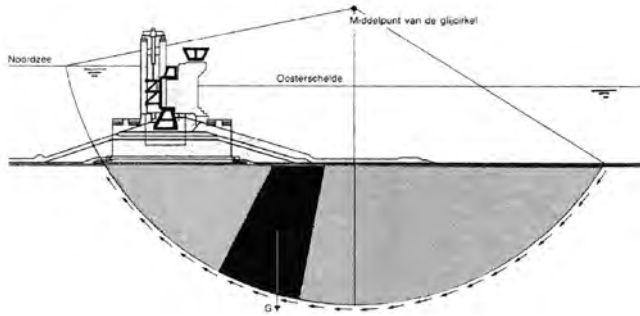
Een onderdeel van de dynamica is de *kinematica* (bewegingsmeetkunde), de studie die zich bezighoudt met de beschrijving van de beweging van lichamen, zonder hierbij de oorzaak van de beweging te betrekken.

Een andere indeling van de mechanica is die naar de mate van vervormbaarheid van de materie:

- *Theoretische mechanica*, de mechanica van *puntdeeltjes* en *starre* (d.w.z. onvervormbare) lichamen.
- *Vaste-stof-mechanica*, de mechanica van vaste vervormbare lichamen.
- *Vloeistofmechanica*.
- *Gasmeechanica*.



Figuur 1.10 De Maeslantkering – een stormvloedkering – in de Nieuwe Waterweg.



Figuur 1.11 De Oosterscheldekering; de constructie moet door de ondergrond gedragen kunnen worden.

1.1.3 Toegepaste mechanica

De *mechanica van constructies* omvat in beginsel zowel de statica als dynamica van constructies. In dit boek blijft de behandeling beperkt tot de statica van constructies.

Met behulp van de mechanica kan men onderzoeken in hoeverre een constructie in zijn geheel en in zijn onderdelen doelmatig en betrouwbaar is uit het oogpunt van sterkte, stijfheid en stabiliteit¹.

Voor constructies die zijn vervaardigd uit vaste vervormbare materialen (beton, hout, kunststoffen, of metalen zoals staal, aluminium), noemt men het vakgebied van de mechanica ook wel *toegepaste mechanica*.

Het deel van de toegepaste mechanica waarin het berekenen van de krachten in een constructie centraal staat wordt soms wel *bouwstatica* genoemd. Het deel waarin het accent valt op de spanningen en vervormingen (sterkte en stijfheid) noemt men ook wel *sterkteleer*. De onderverdeling bouwstatica en sterkteleer is alleen goed mogelijk bij zogenaamd *statisch bepaalde*

*constructies*², dat zijn constructies waarbij de krachtverdeling rechtstreeks uit het evenwicht kan worden gevonden. Bij de berekening van andere dan statisch bepaalde constructies (zgn. *statisch onbepaalde constructies*) zal men gebruik moeten maken van zowel elementen uit de bouwstatica als de sterkteleer.

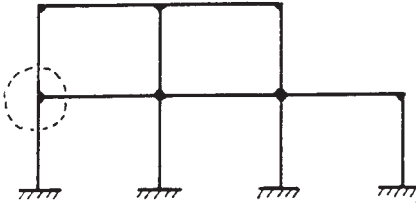
Het gedrag van een constructie dient men 'verder dan tot op de bodem' uit te zoeken. Zo is het belangrijk dat de schuiven in de Oosterscheldekering in figuur 1.11 voldoende sterk zijn, maar het is even belangrijk dat de constructie door de ondergrond gedragen kan worden. Omdat het gedrag van grond zo duidelijk verschilt van gedrag van gewone vaste stoffen, behoort het onderzoek van de krachten en vervormingen in grond tot het aparte vakgebied van de *grondmechanica*.

1.1.4 Theorie en experiment

De mechanica is, als onderdeel van de natuurkunde, een wetenschap die zich bezig houdt met het opsporen van wetten en wetmatigheden waarmee verschijnselen in de natuur kunnen worden beschreven en, wat nog belangrijker is, kunnen worden voorspeld. Als zodanig is de mechanica

¹ Onder *stabiliteit* verstaat men de *betrouwbaarheid van het evenwicht*. Omdat de *stabiliteit van het evenwicht* afhankelijk is van de stijfheid van de constructie kan men een stabiliteitseis ook interpreteren als een stijfheidseis.

² De begrippen *statisch bepaald* en *statisch onbepaald* komen uitvoerig aan de orde in hoofdstuk 4.



Figuur 1.12 De kolommen en balken worden bij de berekening van een gebouw gewoonlijk geschematiseerd tot zogenaamde lijnelementen; de kolom-balk-verbindingen reduceren dan tot puntdeeltjes, met verwaarloosbaar kleine afmetingen.

een *ervaringswetenschap*: er wordt gestreefd naar een zo nauwkeurig mogelijke formulering van de bestudeerde verschijnselen en hun onderlinge samenhang. Daarbij zijn niet de rekenresultaten op zich doorslaggevend, maar wel hun overeenkomst met wat waarnemingen en experimenten ons leren. Men wil immers met een zekere nauwkeurigheid kunnen voorspellen of een gelanceerde satelliet inderdaad in de geplande baan komt, of dat een brug voldoende sterk en stijf is.

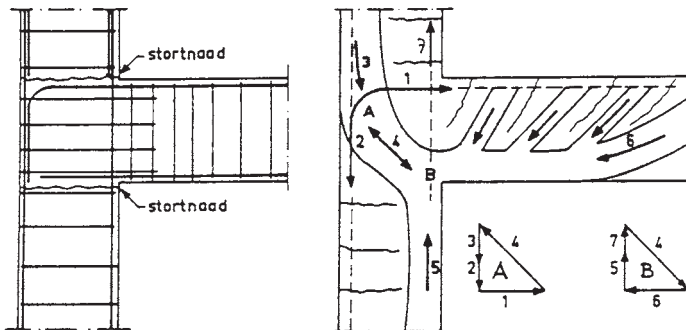
De werkelijkheid is echter veel te complex om deze volledig te kunnen beschrijven. Daarom zal men altijd (moeten) werken met een *model*, dat is een vereenvoudigde voorstelling van de werkelijkheid waarbij slechts een beperkt aantal aspecten

tegelijkertijd aan de orde komt. Welke aspecten worden bekeken en welke *schematiseringen* (vereenvoudigingen) worden gehanteerd hangt af van het beoogde doel.

1.1.5 Schematiseren

Schematiseren is het abstraheren met behoud van alle relevante aspecten. Bij een onderzoek naar de beweging van de aarde om de zon zijn de afmetingen van de aarde van ondergeschikt belang en zal men de aarde schematiseren als een puntdeeltje. Wil men daarentegen een onderzoek doen naar de rotatie van de aarde om zijn as, dan zal men de afmetingen van de aarde wél in de beschouwing moeten betrekken.

Bij de berekening van de krachtsverdeling in een raamwerk is het gebruikelijk de kolommen en balken te schematiseren tot zogenaamde lijnelementen en de verbindingen tussen de balken en kolommen op te vatten als puntdeeltjes, zie figuur 1.12. Wil men meer weten van het krachten spel in een kolom-balk-verbinding, bijvoorbeeld om in het geval van een betonconstructie vast te kunnen stellen waar de wapening moet worden gelegd, dan zijn de afmetingen van de verbinding niet meer te verwaarlozen en moet men voor de verbinding een andere schematisering hanteren, zie figuur 1.13.



Figuur 1.13 Bij de detaillering van een kolom-balk-verbinding, hier in gewapend beton, mag men de afmetingen niet meer verwaarlozen.

In de mechanica worden talrijke begrippen gebruikt die een schematisering van de werkelijkheid inhouden. Zo worden bij een *puntdeeltje* de afmetingen verwaarloosd en bij een *star lichaam* de vervormingen. Een ander voorbeeld is het begrip *spanning*, waarbij wordt uitgegaan van een continue structuur van de materie, terwijl deze in werkelijkheid (op microniveau) discreet is, met moleculen en atomen. Men dient zich van deze schematiseringen bewust te zijn.

Veel kennis binnen het vakgebied van de mechanica is vastgelegd met behulp van wiskundige formules, gebaseerd op bepaalde schematiseringen en modelleringen. De wiskunde biedt vervolgens een taal om mechanica problemen op ondubbelzinnige wijze te kunnen formuleren en de oplossingen eenduidig te kunnen interpreteren. Hierdoor is het mogelijk voorspellingen te doen met betrekking tot het gedrag van een constructie. Dit vermogen tot voorspellen verschaft het vak mechanica zijn praktische bruikbaarheid.

Omdat bij een mechanica-analyse al dan niet intensief gebruik wordt gemaakt van wiskundige procedures (zoals bijvoorbeeld optellen, integreren, reeksontwikkeling) zijn de resultaten – binnen de gekozen schematisering en modellering – exact en wordt de mechanica vaak als een *exact vak* aangeduid.

1.2 Grootheden, eenheden, dimensies

1.2.1 Grootheden en hun eenheden

In de mechanica heeft men te maken met meetbare fysische grootheden. Een *grootheid* X wordt in het algemeen gekarakteriseerd door een *getalwaarde* $\{X\}$ en een *eenheid* $[X]$. Men kan dat symbolisch omschrijven in de vorm:

grootheid = getalwaarde $\times$ eenheid

$$X = \{X\} \cdot [X]$$

De eenheid $[X]$ is de maat waarin men de grootheid X meet.

Tabel 1.1 Basisgrootheden en grondeenheden

basisgrootheid		grondeenheid	
naam	symbool	naam	symbool
lengte	ℓ	meter	m
massa	m	kilogram	kg
tijd	t	seconde	s
elektrische stroom	I	ampère	A
thermodynamische temperatuur	T	kelvin	K
hoeveelheid stof	n	mol	mol
lichtsterkte	I	candela	cd

Tabel 1.2 Aanvullende grootheden en eenheden

aanvullende grootheid		aanvullende eenheid	
naam	symbool	naam	symbool
(vlakke) hoek	α	radiaal	rad
ruimtehoek	Ω	steradiaal	sr

In de mechanica gebruikt men het Internationale Stelsel van Eenheden (Système International d'Unité), in alle talen verkort aangeduid met SI.

Het SI omvat:

- zeven grondeenheden (tabel 1.1);
- twee aanvullende eenheden (tabel 1.2);
- een groot aantal afgeleide eenheden.

Basisgrootheden, die in de mechanica van constructies een belangrijke plaats innemen zijn *lengte*, *massa* en *tijd*.

Lengte (ℓ) Een maat voor het meten van afstanden in de ruimte.

Onder ruimte wordt het meetkundig gebied verstaan waarin de mens leeft en werkt en waarin hij zijn constructies opricht.

De grondeenheid van lengte is de meter [m].

Massa (m) Een maat voor de eigenschap van een lichaam dat het zich verzet tegen een verandering van zijn beweging. Deze eigenschap noemt men de *traagheid* of *inertie* van het lichaam. De grondeenheid van massa is het kilogram [kg] (dus niet het gram!).

Tijd (t) Een maat voor de opeenvolging van gebeurtenissen. Grondeenheid is de seconde [s].

De afgeleide eenheden van het SI worden uit de definities van de afgeleide grootheden verkregen als producten en quotiënten van machten van grondeenheden. Een aantal afgeleide eenheden heeft een eigen naam en een eigen symbool. Enkele van deze eenheden zijn vermeld in tabel 1.3.

1.2.2 Voorvoegsels

Als een getal erg groot of erg klein is kan men gebruik maken van een *voorvoegsel* bij de eenheid. Vaak gebruikte SI-voorvoegsels zijn opgenomen in tabel 1.4.

Voorbeeld:

$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$

Bij een afgeleide eenheid in de vorm van een product van een aantal eenheden mag men de symbolengroep aan elkaar schrijven, tenzij er verwarring kan ontstaan. In het laatste geval moet men tussen de eenheden een vermenigvuldigingspunt plaatsen.

Zo kan men Nms lezen als newton-meter-seconde en als newton-milliseconde. Al naar gelang de bedoeling moet men daarom schrijven Nm · s of N · ms.

1.2.3 Dimensies

Behalve de eenheid [X] waarin een grootheid X wordt uitgedrukt en de bijbehorende getalwaarde {X} heeft een grootheid ook een dimensie dim(X). De *dimensie* van een grootheid duidt de grootheidsoort aan zonder iets te zeggen over de keuze van de eenheid of de grootte van de getalwaarde.

Tabel 1.3 Afgeleide eenheden met een eigen naam en een eigen symbool

afgeleide grootheid	afgeleide eenheid	
	naam	symbool
oppervlakte	vierkante meter	m ²
volume, inhoud	kubieke meter	m ³
frequentie	hertz	Hz = s ⁻¹
kracht	newton	N = kg · m/s ²
druk, spanning	pascal	Pa = N/m ²
arbeid, energie, hoeveelheid warmte	joule	J = Nm
vermogen, energiestroom	watt	W = J/s

Tabel 1.4 Vaak gebruikte SI-voorvoegsels

voorvoegsel	symbool	factor
giga	G	10 ⁹
mega	M	10 ⁶
kilo	k	10 ³
milli	m	10 ⁻³
micro	μ	10 ⁻⁶
nano	n	10 ⁻⁹

Tabel 1.5 Voorbeelden van afgeleide grootheden en hun dimensies

grootheden-soort	definitie-vergelijking	dimensie-formule	SI-eenheid
snelheid	$v = du/dt$	LT ⁻¹	m/s
kracht	$F = m \cdot a$	LMT ⁻²	N = kgm/s ²
energie, arbeid	$E = A = F \cdot \ell$	L ² MT ⁻²	J = kgm ² /s ²

De dimensies van de basisgrootheden worden de gronddimensies genoemd. Voor de gronddimensies van lengte (ℓ) massa (m) en tijd (t) schrijft men:

$\dim(\ell) = L$

$\dim(m) = M$

$\dim(t) = T$

Enkele voorbeelden van afgeleide grootheden en hun dimensies zijn opgenomen in tabel 1.5.

Dimensieformules kan men gebruiken om na te gaan of in de afleiding van een fysische betrekking geen onjuistheden zijn ingeslopen (*dimensiecontrole*). Men gaat dan na of voldaan is aan de voorwaarde dat de uitdrukkingen links en rechts van het isgelijktteken dezelfde dimensie hebben. Hetzelfde kan men ook bereiken door na te gaan of aan beide zijden het product van alle eenheden, uitgedrukt in de grondeenheden, hetzelfde is.

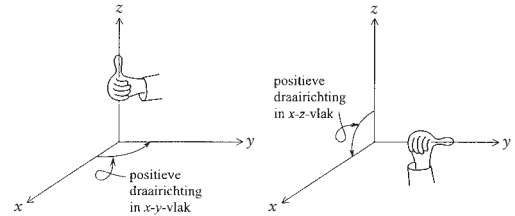
De vlakke hoek en ruimtehoek worden als dimensieloze grootheden opgevat. In een dimensiecontrole moeten de symbolen voor rad en sr daarom gelijk aan 1 worden gesteld.

1.3 Vectoren

1.3.1 Scalars en vectoren

Van sommige fysische grootheden is de waarde volledig vastgelegd door een enkel getal met de bijbehorende eenheid. Voorbeelden hiervan zijn: lengte, massa, tijd, temperatuur, arbeid, energie. Men noemt ze *scalaire grootheden*, of kortweg *scalars*.

Andere fysische grootheden kan men alleen dan volledig beschrijven als naast de grootte (vastgelegd door een getal en een eenheid) ook wordt aangegeven in welke richting in de ruimte de grootheid is georiënteerd. Voldoen deze grootheden met een grootte én richting aan de zogenaamde *parallellogramregel* (zie paragraaf 1.3.4), dan worden het *vectoren* genoemd. Voorbeelden van vectoren zijn: verplaatsing, snelheid, impuls, versnelling, kracht.



Figuur 1.14 Een rechts orthogonaal assenstelsel.

Om vectoren van scalars te kunnen onderscheiden worden de symbolen voor een vector vet gedrukt ($\mathbf{a}$) of worden ze voorzien van een pijl erboven ($\vec{a}$).

Andere fysische grootheden dan scalars en vectoren zijn *tensoren*¹ (van de orde twee en hoger). Hun behandeling valt buiten het kader van dit boek.

1.3.2 Assenstelsel

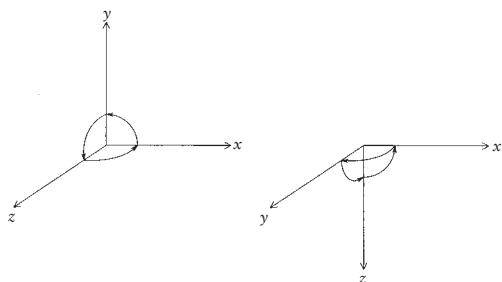
Vectoren zijn grootheden met een richting in de ruimte. De ruimte wordt geacht driedimensionaal en (naar Euclides²) euclidisch te zijn.

Voor het beschrijven van verschijnselen in de ruimte wordt hierna gebruik gemaakt van een *rechts orthogonaal assenstelsel*. Dit is een stelsel van drie onderling loodrechte assen x , y en z , die zodanig zijn georiënteerd dat ze voldoen aan de zogenaamde *rechterhandregel*: maakt men de vingers van de rechterhand tot een vuist en laat men de vrijgehouden duim in de z -richting wijzen, dan moeten de gekromde vingers in de vuist wijzen in de richting van een rotatie over de kleinste hoek van de x -as naar de y -as. Deze richting van de rotatie over de kleinste hoek van de x -as naar de y -as geldt als de positieve draairichting in het x - y -vlak (om de z -as).

In deze omschrijving kunnen x , y en z cyclisch worden verwisseld, zie figuur 1.14.

¹ Scalars en vectoren zijn op te vatten als leden van de familie van tensoren. Vectoren noemt men wel tensoren van de eerste orde. Scalars zijn dan tensoren van de orde nul. Enkele voorbeelden van tweede-orde-tensoren in de mechanica zijn de rektensor, spanningstensor, buigstijfheidstensor. Tensoren kan men herkennen aan de transformatieregels voor hun componenten bij rotatie van het assenstelsel.

² Euclides (ca. 300 v.C.), Grieks wiskundige te Alexandrië.



Figuur 1.15 Het orthogonale rechtse assenstelsel in twee andere standen, met de positieve draairichtingen in de coördinaatvlakken.

In figuur 1.15 zijn nog twee voorbeelden van dergelijke assenstelsels gegeven, met de positieve draairichtingen in de verschillende coördinaatvlakken.

Een orthogonaal assenstelsel wordt (naar Descartes¹) *cartesiaans* genoemd als langs de coördinaatassen gelijke eenheden worden gekozen.

Worden langs de assen gelijke eenheidsvectoren gekozen dan spreekt men van een *orthonormaal* assenstelsel (samentrekking van orthogonaal en genormeerd).

1.3.3 Typen vectoren

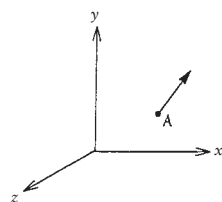
Men kan een vector in de ruimte visueel weergeven met een pijl. De richting van de pijl staat voor de richting van de vector. De lengte van de pijl kan men (op zekere schaal) in overeenstemming kiezen met de grootte van de vector.

Een nadere beschouwing leert dat er drie typen vectoren kunnen worden onderscheiden:

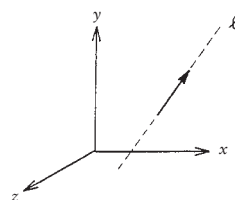
- **Gebonden vectoren**

Een gebonden vector heeft behalve een grootte en een richting ook een *aangrijpingspunt*, zie figuur 1.16.

Voorbeeld: De kracht op een vervormbaar lichaam.



Figuur 1.16 Gebonden vector met aangrijpingspunt A.



Figuur 1.17 Glijdende vector met werklijn ℓ .

- **Glijdende vectoren**

Soms is de plaats van het aangrijpingspunt minder belangrijk en mag het in de richting van de vector worden verplaatst. Men spreekt dan van een glijdende vector. Een glijdende vector heeft geen vast aangrijpingspunt, maar alleen een *werklijn*, zie figuur 1.17.

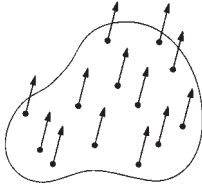
Voorbeeld: De kracht op een star lichaam.

- **Vrije vectoren**

Als ook de plaats van de werklijn van een vector niet ter zake doet spreekt men van een vrije vector.

Voorbeeld: De translatie van een star lichaam. Alle punten van het lichaam ondergaan dezelfde verplaatsing. De vrije vector staat voor de gehele verzameling verplaatsingsvectoren, zie figuur 1.18.

¹ René Descartes (Cartesius) (1596-1650), Frans wiskundige en wijsgeer. Bracht vele jaren in Nederland door. Hoofdwerk: 'Discours de la méthode' (1637).



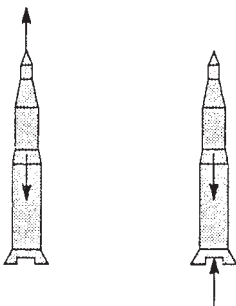
Figuur 1.18 Vrije vector.

Opmerking:

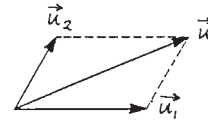
Wanneer men het evenwicht (of de beweging) van een lichaam in zijn geheel wil onderzoeken, dan mag men het lichaam vaak als star (onvervormbaar) opvatten, met de krachten als glijdende vectoren. Voor een star lichaam maakt het immers niet uit of het in evenwicht wordt gehouden door een kracht aan zijn bovenkant of aan zijn onderkant, zie figuur. 1.19.

Wil men daarentegen vervormingen of verschijnselen in het inwendige van het lichaam onderzoeken, dan spelen de aangrijpingspunten van de krachten wél een rol en moeten de krachten worden opgevat als gebonden vectoren.

Voor verschijnselen in het inwendige van het lichaam (zoals bijvoorbeeld een mens) maakt het wel degelijk uit of het lichaam aan de bovenzijde is opgehangen of aan de onderzijde wordt ondersteund!



Figuur 1.19 Voor het evenwicht van een star lichaam maakt het niet uit of een kracht langs zijn werklijn wordt verschoven. Voor wat er inwendig gebeurt maakt het wel degelijk verschil.



Figuur 1.20 Vectoroptelling met behulp van de parallellogramregel.

1.3.4 Parallellogramregel

Twee vectoren met hetzelfde aangrijpingspunt kan men samenstellen tot een enkele vector met behulp van de zogenaamde *parallellogramregel* in figuur 1.20.

Men kan zich deze regel eenvoudig voorstellen door bijvoorbeeld in figuur 1.21 de beweging te beschouwen van een man lopend op een varend schip. De verplaatsing $\vec{u}$ van de man ten opzichte van de aarde bestaat uit de som van de verplaatsing $\vec{u}_1$ van het schip ten opzichte van de aarde en zijn eigen verplaatsing $\vec{u}_2$ ten opzichte van het schip.

Op dezelfde wijze kan men snelheidsvectoren en krachtenvectoren optellen.

Voor de vectoroptelling, zoals weergegeven in figuur 1.20, kan men schrijven:

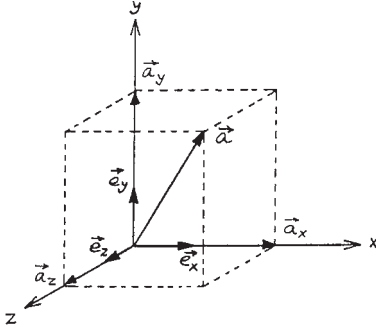
$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Omgekeerd zegt men dat $\vec{u}_2$ het verschil is van $\vec{u}$ en $\vec{u}_1$:

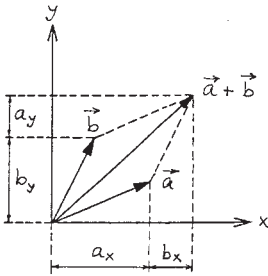
$$\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1$$



Figuur 1.21 De vectoroptelling geïllustreerd aan de hand van een man die loopt over een varend schip.



Figuur 1.22 De componenten $\vec{a}_x; \vec{a}_y; \vec{a}_z$ van vector $\vec{a}$.



Figuur 1.23 Men kan twee vectoren samenstellen door hun overeenkomstige componenten (kentallen) bij elkaar op te tellen.

1.3.5 Componenten, kentallen en norm van een vector

Men beschrijft een vector vaak door zijn zogenaamde componenten.

Zijn $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ en $\vec{e}_z$ de eenheidsvectoren langs resp. de x-, y- en z-as (dus vectoren gericht langs de assen en met een grootte gelijk aan 1), dan kan men de vector schrijven als de vectorsom van zijn drie componenten, zie figuur 1.22:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

De grootheden $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ en $\vec{a}_z$ noemt men de *componenten* van vector $\vec{a}$.

De grootheden a_x , a_y en a_z noemt men in de wiskunde de *kentallen* van vector $\vec{a}$.

In de mechanica gebruikt men het woord *component* ook vaak als eigenlijk *kental* wordt bedoeld. Deze gewoonte wordt in dit boek overgenomen.

De *grootte* of *norm* van vector $\vec{a}$ is:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (a \geq 0)$$

Het samenstellen van twee vectoren die gegeven zijn door hun componenten kan analytisch geschieden door de overeenkomstige componenten bij elkaar op te tellen. De som van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met componenten a_x , a_y en a_z , respectievelijk b_x , b_y en b_z , is:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y + (a_z + b_z)\vec{e}_z$$

In figuur 1.23 is dat geïllustreerd voor twee vectoren die in het x-y-vlak liggen (dus met $a_z = b_z = 0$).

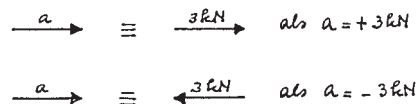
1.3.6 Formele en visuele notatie van een vector

In de figuren werd tot nu toe bij de pijl voor een vector het vectorsymbool (letter met pijl erboven) geschreven. Naast deze *formele notatie* bestaat er ook een *visuele notatie*. Beide notaties zijn weer gegeven in figuur 1.24.

In de visuele notatie stelt elke getekende pijl een eenheidsvector voor, die moet worden vermenigvuldigd met de bij de pijl geschreven waarde. Is



Figuur 1.24 Vectornotatie (a) en visuele notatie (b).



Figuur 1.25 In de visuele notatie dient men de getekende pijl op te vatten als een eenheidsvector die moet worden vermenigvuldigd met de bijgeschreven waarde.

Dit boek maakt deel uit van een serie mechanicastudieboeken voor de opleidingen Bouwkunde en Weg- en Waterbouwkunde (Civiele Techniek) in het hoger onderwijs (hbo en technische universiteit):

- Mechanica: Evenwicht
- Mechanica: Spanningen, vervormingen, verplaatsingen
- Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse

Dit boek biedt een grondige behandeling van vele onderwerpen die vallen onder het thema evenwicht. Bijzondere aandacht gaat uit naar statisch bepaalde staafconstructies. Er wordt uitgebreid aandacht besteed aan de analyse van een constructie of situatie; berekeningen worden uitgevoerd volgens een zeer systematische aanpak.

Het op de juiste wijze toepassen van de mechanica vereist een hoeveelheid inzicht en vaardigheid die men vooral opdoet door uitgebreide oefening. Hiertoe biedt dit boek een zeer groot aantal uitgewerkte voorbeelden en vraagstukken, die zodanig zijn gestructureerd dat het doorwerken ervan resulteert in kennismaking met vele aspecten van dit vakgebied. De bijbehorende opgaven zijn beschikbaar via www.mechanicaevenwicht.nl.

De auteur heeft jarenlange ervaring in het doceren en doseren van mechanicaonderwijs aan de opleiding Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft.

ISBN 978-90-2442-925-7



www.mechanicaevenwicht.nl
www.boomhogeronderwijs.nl

