



Boom

MECHANICA

Spanningen,
vervormingen,
verplaatsingen

COENRAAD HARTSUIJKER

Derde druk

Mechanica

Spanningen, vervormingen, verplaatsingen

3^e druk

Coenraad Hartsuijker

Boom

**inclusief
website!**

Met behulp van onderstaande unieke activeringscode krijg je toegang tot de website www.mechanicaevenwicht.nl voor extra materiaal. Deze code is persoonsgebonden en gekoppeld aan de derde druk. Na activering van de code is de website 3 jaar toegankelijk. De code kan tot zes maanden na het verschijnen van een volgende druk geactiveerd worden.

De code is eenmalig te gebruiken.

Op het gebied van mechanica en sterkteleer zijn bij Boom uitgevers Amsterdam de volgende uitgaven beschikbaar:

- C. Hartsuijker. *Mechanica: Evenwicht*
- C. Hartsuijker. *Spanningen, vervormingen verplaatsingen*
- C. Hartsuijker & J.W.Welleman. *Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse*

Omslagontwerp: Haagsblauw, Den Haag

Opmaak binnenwerk: Heymans & Vanhove, Goes

© 2020 Hartsuijker & Boom Uitgevers Amsterdam, 3^e druk

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden veelelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische veelelvoudingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (art. 16 Auteurswet) kan men zich wenden tot de Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm or any other means without written permission from the publisher.

ISBN 9789024429295

ISBN 9789024429301 (e-book)

NUR 123 / 929

www.mechanicaspenningen.nl

www.boomhogeronderwijs.nl

Woord vooraf van de uitgever

Dit boek is het tweede deel uit een serie leerboeken Toegepaste Mechanica, waarin een helder en compleet beeld wordt gegeven van de theorie en toepassingen van de mechanica van constructies in de bouwkunde en weg- en waterbouwkunde/civiele techniek.

De serie bestaat uit drie boeken:

- 1 Evenwicht
- 2 Spanningen, vervormingen en verplaatsingen
- 3 Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse

Het is niet noodzakelijk deel 1 volledig af te ronden om aan deel 2 te kunnen beginnen. Als de onderwijssituatie daarom vraagt kunnen de delen 1 en 2 gedeeltelijk ook parallel aan elkaar worden behandeld.

De inhoud is het resultaat van een jarenlange ervaring met het mechanicaonderwijs aan de Technische Universiteit Delft en het commentaar van vele collega's in de onderwijssector en generaties studenten. Niet voor niets hebben deze dictaten binnen én buiten de Technische Universiteit Delft al lange tijd een goede reputatie. Bovendien hebben vele docenten mechanica van de jongere generatie het mechanica vak tijdens hun opleiding bestudeerd aan de hand van deze dictaten. Mede hierdoor wordt een aantal van deze dictaten reeds aan verschillende HBO-opleidingen gebruikt.

De inhoud van deze dictaten is gebundeld tot een drietal leerboeken, waardoor het resultaat van deze rijke onderwijservaring voor een veel grotere groep toegankelijk wordt als ondersteuning bij het mechanica-onderwijs in zowel het HBO als bij de Technische Universiteiten.

Bij de opzet is gezocht naar een fundamentele aanpak zonder daarbij de relatie met de bouwpraktijk te verliezen. Het grote aantal uitgewerkte voorbeelden in de tekst, alsmede de vele vraagstukken (beschikbaar via de webpagina bij dit boek op www.mechanicaspennings.nl) maken van dit boek een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen en oefenen van het vak Toegepaste Mechanica.

Woord vooraf van de auteur

Dit boek, bestemd voor HBO- en TU-studenten en verder voor ieder die kennis wil maken met de eerste beginselen van de Toegepaste Mechanica, is het tweede deel uit een serie van drie.

In het eerste deel, met het thema '*Evenwicht*', wordt onder meer aangegeven hoe men in een statisch bepaalde staafconstructie de snedekrachten kan berekenen. Het tweede deel bouwt hierop verder met een onderzoek naar het gedrag van staaf en constructie voor wat betreft de '*Spanningen, vervormingen, verplaatsingen*'. De inhoud is voor een deel gebaseerd op dictaten die werden ontwikkeld voor het onderwijs in de basis aan de faculteit Civiele Techniek, thans Civiele Techniek en Geowetenschappen, van de Technische Universiteit Delft.

Om de spanningen en vervormingen te kunnen berekenen moet men eerst het *materiaalgedrag* kennen. Hieraan wordt aandacht besteed in hoofdstuk 1. Een aantal materiaaleigenschappen die van belang zijn bij de op buiging en extensie belaste staaf vindt men in het spanning-rek diagram, af te leiden uit de trekproef. Er wordt aangenomen dat het materiaal zich linear-elastisch gedraagt en de wet van Hooke volgt.

In hoofdstuk 2 wordt aan de hand van het vezelmodel het gedrag (de '*spanningen, vervormingen, verplaatsingen*') onderzocht van de *op extensie belaste staaf*. Behalve een evenwichtsvergelijking zijn daarvoor nodig een constitutieve en een kinematische vergelijking, die daartoe worden afgeleid. Verder komen aan de orde: zwaartepunt, normaalkrachtencentrum, rek- en spanningsdiagram, rekstijfheid, lengteverandering door extensie en tenslotte de differentiaalvergelijking voor extensie.

Vervolgens worden in hoofdstuk 3 de *doorsnedegrootheden* (lineaire en kwadratische oppervlaktemomenten) gedefinieerd die een rol spelen bij de op buiging en extensie belaste staaf. De lineaire oppervlaktemomenten (statische momen-

ten) gebruikt men bij de zwaartepuntbepaling. De kwadratische oppervlaktemomenten (traagheidsmomenten) spelen onder meer een rol in de formules voor buiging.

Door de doorsnedegrootheden voorafgaand aan hoofdstuk 4 te definiëren wordt bij de behandeling van de op extensie en buiging belaste staaf de aandacht niet van de kern van de zaak afgeleid.

In hoofdstuk 4 wordt het gedrag van *de op buiging en extensie belaste staaf* onderzocht. Aan de hand van opnieuw het vezelmodel worden de constitutieve en kinematische vergelijkingen afgeleid. Aan de orde komen: normaalkrachten, spanning- en rekdiagram, kromming, buigstijfheid, spanningsformule (betrokken op de hoofdrichtingen van de doorsnede), weerstandsmoment, kern van de doorsnede en tenslotte de differentiaalvergelijkingen voor buiging en extensie. Door de staaf als lijnelement te laten samenvallen met de vezel door het normaalkrachtencentrum kan men de gevallen van buiging en extensie gescheiden behandelen.

Als het buigend moment in een staaf niet constant is moet de staaf ook een dwarskracht overbrengen. Dit leidt niet alleen tot schuifspanningen in het vlak van de doorsnede, maar ook tot schuifkrachten en -spanningen in langsricting. Beide kunnen direct uit het evenwicht worden berekend. De vervorming door afschuiving blijft buiten beschouwing.

In hoofdstuk 5, *schuifkrachten en -spanningen door dwarskracht*, worden eerst de schuifkrachten en -spanningen in langsricting behandeld (toepassingen zijn: lijm- en lasnaden, verbindingen met deuvels en draadnagels) en vervolgens worden de formules voor de schuifspanningen in het vlak van de doorsnede afgeleid en toegepast op verschillende doorsnedevormen (rechthoek, T-balk, driehoek, dunwandige open doorsneden, symmetrische dunwandige eencellige kokerdoorsneden). Aan de orde komt ook het dwarskrachtencentrum: dat is het punt in de doorsnede waar de werklijn van de dwarskracht door moet gaan opdat er geen wringing optreedt. Het hoofdstuk

wordt afgesloten met enkele bijzondere gevallen van afschuiving, zoals pons en de schuifspanningen in een overlappende boutverbinding.

Behalve dwarskrachten geven ook wringende momenten schuifspanningen in het vlak van de doorsnede. In hoofdstuk 6 wordt de *op wringing belaste staaf* behandeld. Voor de vervorming door wringing moet men van het materiaalgedrag de relatie tussen schuifspanning en hoekvervorming kennen, af te leiden uit de wringproef. Opnieuw wordt aangenomen dat het materiaal zich lineair-elastisch gedraagt en de wet van Hooke volgt. De elementaire begrippen bij wringing worden gedefinieerd aan de hand van een dunwandige cirkelvormige doorsnede. Aan de orde komen: constitutieve betrekking, kinematische betrekking, torsietraagheidsmoment, wringstijfheid, schuifstroom, verwringing, rotatie door wringing. Vervolgens worden de formules voor schuifspanningen en vervorming uitgewerkt voor andere cirkelvormige doorsneden (dikwandig, massief), voor dunwandige eencellige kokerdoorsneden, voor een strip en voor open dunwandige doorsneden.

Bleef de aandacht in de meeste gevallen tot nu toe beperkt tot een enkele staaf, in de laatste twee hoofdstukken gaat de aandacht ook uit naar *staafconstructies*. In hoofdstuk 7 wordt de *vervorming van vakwerken* behandeld en in hoofdstuk 8 de *vormverandering door buiging* van onder meer, geknikte staven, spanten en scharnierliggers.

In hoofdstuk 7 wordt beschreven hoe men in een *vakwerk* uit de lengteverandering van de staven de knoopverplaatsingen kan berekenen. Daarbij wordt de grafische aanpak met behulp van een *Williot-diagram* gevolgd. Het succes van deze methode is een gevolg van het feit dat men telkens een knooppunt kan vinden dat direct verbonden is met twee andere knooppunten waarvan de verplaatsingen bekend zijn. Wanneer dat niet zo is wordt de berekening bewerkelijker. Voor die gevallen worden het *Williot-diagram met terugdraaien* behandeld en het *Williot met*

nulstandsdiagram of *Williot-Mohr-diagram*. De verschillende methoden worden toegelicht aan de hand van voorbeelden.

In hoofdstuk 8 wordt aangegeven hoe de verplaatsing ten gevolge van buiging kan worden berekend. Aan de hand van voorbeelden wordt een viertal methoden besproken, gebaseerd op respectievelijk:

- een rechtstreekse berekening uit het momentenverloop;
- de differentiaalvergelijking voor buiging;
- de vergeet-mij-nietjes;
- de momentenvlakstellingen.

De eerste twee methoden zijn gebaseerd op *differentiaalbetrekkingen* en hebben een *analytisch* karakter. De methode gebaseerd op vergeet-mij-nietjes is sterk *visueel* gericht. Ook bij de uitwerking van de momentenvlakstellingen is gekozen voor een *visuele interpretatie*.

Hoofdstuk 8 wordt afgesloten met enkele aan de momentenvlakstellingen gerelateerde eigenschappen voor een vrij opgelegde ligger; het gaat daarbij om de rotatie in de opleggingen en een benaderingsformule voor de maximum doorbuiging.

In de hoofdstukken 2 t/m 8 zijn talrijke uitgewerkte voorbeelden opgenomen. Verder worden de hoofdstukken afgesloten met een groot aantal vraagstukken.

Als voorkennis is een goede beheersing van de evenwichtslaar (Toegepaste Mechanica - deel 1) vereist. Voorts is kennis op het gebied van differentieren en integreren noodzakelijk. Voor de opzet van dit deel geldt hetzelfde als wat is geschreven in het woord vooraf van deel 1.

De tekst wordt ondersteund door een zeer groot aantal figuren en is zo opgeschreven dat studenten zich de lesstof in principe zelfstandig eigen kunnen maken.

Het boek zal echter nooit de docent kunnen vervangen. In het onderwijsproces is de docent een onmisbare katalysator. Door de docent kan dit proces, gericht op het verwerven van kennis, inzicht en vaardigheid, in belangrijke mate wor-

den versneld. Zo zou de docent aan de hand van de figuren uit het boek het verhaal in grote lijnen kunnen vertellen, waarna de student een en ander nog eens zelf kan nalezen - en dan blijkt dat vaak veel gemakkelijker en sneller te gaan dan men in eerste instantie zou verwachten. Maar ook andere werkwijzen zijn denkbaar.

Ondanks de hiervoor beschreven en welbewust gekozen opbouw van het boek zijn er voldoende mogelijkheden om zonder problemen bepaalde delen over te slaan als het onderwijsprogramma daar om vraagt of als de docent dat wenselijk acht. Daarnaast biedt het grote aantal vraagstukken de docent de gelegenheid een eigen aanvullende onderwijsstrategie te ontwikkelen.

Onder de vraagstukken bevindt zich een groot aantal kleine opgaven die zich bij uitstek lenen voor oefening in groepsverband, tijdens de les. De grotere vraagstukken, meestal opgesplitst in deelvragen, zijn eerder bedoeld als opdrachten die individueel of in kleine groepjes moeten worden uitgevoerd. Samenwerking tussen de studenten dient daarbij te worden aangemoedigd: het aan elkaar vertellen wat je *niet* begrijpt is net zo leerzaam als het aan elkaar vertellen wat je *wel* begrijpt. Bovendien wordt de student aldus uitgedaagd zelf te ontdekken dat er vaak meerdere wegen zijn die tot het gevraagde resultaat leiden. Een beter inzicht en grotere vaardigheid is alleen te bereiken door veel en regelmatig te oefenen. Voor een goede afstemming en dosering is ook hier weer de hand van de meester nodig: de docent.

Prof. ir. D. Dicke dank ik voor de opgavenverzameling die hij mij ter beschikking stelde. Ir. Charles Vrijman, dr. ir. Harm Askes, ir. Rob Mooyman (†), ir. Sandra Faessen en de groep studentassistenten verdienen mijn dank voor het kritisch doornemen van het manuscript. Ir. Rob Mooyman heeft bovendien een belangrijke bijdrage geleverd in het opzetten en uitwerken van de figuren in de hoofdstukken 5 en 6.

Nootdorp, zomer 2001

C. Hartsuijker

Woord vooraf van de auteur bij de 2^e en 3^e druk

Op verzoek van de uitgever is het oblong formaat ingewisseld voor een staand formaat, waarbij er opnieuw naar is gestreefd tekst en bijbehorende figuren op twee naast elkaar gelegen pagina's te houden. De series vraagstukken waarmee de hoofdstukken werden afgesloten staan niet meer in het boek, maar zijn nu beschikbaar via de web-pagina bij het boek op www.mechanicaspanningen.nl. Bij de derde druk is daarnaast ook kleur toegevoegd.

*Nootdorp, januari 2016
voorjaar 2020*

C. Hartsuijker

Inhoud

1 Materiaalgedrag 1

- 1.1 Trekproef 1
- 1.2 Spanning-rek-diagrammen 4
- 1.3 Wet van Hooke 7

2 De op extensie belaste staaf 11

- 2.1 Het vezelmodel voor de staaf 11
- 2.2 De drie basisbetrekkingen 12
- 2.3 Rekdiagram en
normaalspanningsdiagram 16
- 2.4 Normaalkrachtencentrum en staafas 17
- 2.5 Wiskundige beschrijving van het
extensieprobleem 20
- 2.6 Rekenvoorbeelden met betrekking tot
lengteverandering en verplaatsing 22
- 2.7 Rekenvoorbeelden met betrekking tot de
differentiaalvergelijking 28

3 Doorsnedegrootheden 33

- 3.1 Lineaire oppervlaktemomenten; zwaartepunt
en normaalkrachtencentrum 34
- 3.2 Kwadratische oppervlaktemomenten 45
- 3.3 Dunwandige doorsneden 62

4 De op buiging en extensie belaste staaf 71

- 4.1 Het vezelmodel voor de staaf 72
- 4.2 Rekdiagram en neutrale lijn 73
- 4.3 De drie basisbetrekkingen 75
- 4.4 Spanningsformule en spanningsdiagram 82
- 4.5 Rekenvoorbeelden met betrekking tot
de spanningsformule voor buiging met
normaalkracht 83
- 4.6 Weerstandsmoment 95
- 4.7 Rekenvoorbeelden met betrekking tot de
spanningsformule voor buiging zonder
normaalkracht 95
- 4.8 Algemene spanningsformule betrokken op
de hoofdrichtingen 103

- 4.9 Kern van de doorsnede 106

- 4.10 Toepassingen kern van de doorsnede 110

- 4.11 Wiskundige beschrijving van het probleem
van buiging met extensie 118

- 4.12 Temperatuurinvloeden 120

- 4.13 Kanttekeningen bij het vezelmodel en
samenvatting formules 122

5 Schuifkrachten en -spanningen ten gevolge van dwarskracht 127

- 5.1 Schuifkrachten en -spanningen in
langsrichting 127
- 5.2 Voorbeelden met betrekking tot
schuifkrachten en -spanningen in
langsrichting 134
- 5.3 Schuifspanningen in het vlak van de
doorsnede 147
- 5.4 Voorbeelden met betrekking tot
het schuifspanningsverloop in de
doorsnede 154
- 5.5 Dwarskrachtencentrum 193
- 5.6 Bijzondere gevallen van afschuiving 200
- 5.7 Samenvatting formules en regels 204

6 De op wringing belaste staaf 207

- 6.1 Materiaalgedrag bij afschuiving 207
- 6.2 Wringing van cirkelvormige
doorsneden 209
- 6.3 Wringing van dunwandige doorsneden 216
- 6.4 Uitgewerkte rekenvoorbeelden 226
- 6.5 Overzicht formules 242

7 Vervorming van vakwerken 243

- 7.1 Het gedrag van een enkele
vakwerkstaaf 243
- 7.2 Williot-diagram 245
- 7.3 Williot-diagram met terugdraaien 260
- 7.4 Williot-Mohr-diagram 267

8 Vormverandering door buiging 273

- 8.1 Directe berekening uit het momentenverloop 274
- 8.2 Differentiaalvergelijking voor buiging 281
- 8.3 Vergeet-mij-nietjes 293
- 8.4 Momentenvlakstellingen 310
- 8.5 De vrij opgelegde ligger en het M/EI-vlak 333

Symbolen, tekenafspraken en formules 345**Trefwoordenregister 359**

1

Materiaalgedrag

Om de spanningen in en vervormingen van constructies te kunnen berekenen moet men het *materiaalgedrag* kennen. Inzicht in het materiaalgedrag is slechts langs experimentele weg te verkrijgen.

Door middel van gestandaardiseerde proeven tracht men de materiaaleigenschappen vast te leggen in de waarden van een aantal specifieke grootheden. Eén van deze proeven is de in paragraaf 1.1 beschreven *trekproef* die resulteert in een zogenaamd *spanning-rek-diagram*.

In paragraaf 1.2 wordt voor een aantal materialen het spanning-rek-diagram nader bekeken.

Omdat het hierna overwegend zal gaan over materialen die zich *lineair-elastisch* gedragen en de *wet van Hooke* volgen, wordt in paragraaf 1.3 apart aandacht besteed aan deze materialen.

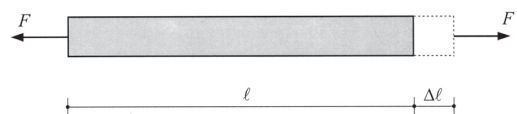
1.1 Trekproef

Enkele belangrijke materiaaleigenschappen zijn de sterkte, stijfheid en taaiheid, als volgt te omschrijven:

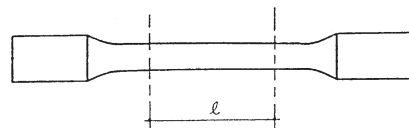
- sterkte** – de weerstand die overwonnen moet worden om de samenhang van het materiaal te breken;
- stijfheid** – de weerstand tegen vervorming;
- taaiheid** – de mogelijkheid van vervorming alvorens breuk optreedt.

Een belangrijke en veel toegepaste proef om de *sterkte, stijfheid en taaiheid* van een materiaal te vinden is de *trekproef*. Bij de trekproef wordt een proefstaaf in een zogenaamde *trekbank* geplaatst en langzaam uitgerekt tot de staaf breekt. Bij de aangebrachte verlenging $\Delta\ell$ registreert men de daartoe benodigde kracht F^1 . Beide waarden worden in een diagram tegen elkaar uitgezet.

In figuur 1.1 is een prismatische staaf getekend, dit is een staaf met overal dezelfde dwarsdoorsnede. Om te voorkomen dat de staaf nabij de uiteinden breekt heeft een proefstaaf meestal de in figuur 1.2 getekende vorm. In dat geval is $\Delta\ell$ de verlenging van de afstand ℓ tussen twee meetpunten op het prismatische middengedeelte van de staaf.

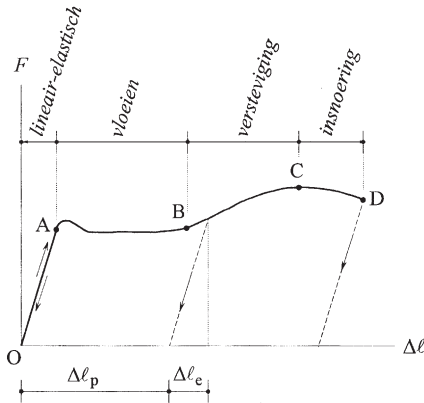


Figuur 1.1 Een op trek belaste prismatische staaf.



Figuur 1.2 De vorm van een proefstaaf.

¹ Brengt men een verlenging aan en meet men de daartoe benodigde kracht, dan noemt men de proef *vervormingsgestuurd*. Laat men daarentegen de belasting geleidelijk toenemen en meet men de optredende lengteverandering, dan heet de proef *belastinggestuurd*. Een vervormingsgestuurde proef geeft in het algemeen andere uitkomsten dan een belastinggestuurde proef.



Figuur 1.3 Een kracht-verlenging-diagram (F - $\Delta\ell$ -diagram).



Figuur 1.4 Insnoering van de proefstaaf.

Voor een proefstaaf van warmgewalst staal leidt de trekproef tot een *kracht-verlenging-diagram* of F - $\Delta\ell$ -diagram zoals schematisch (niet op schaal) is weergegeven in figuur 1.3.

In dit F - $\Delta\ell$ -diagram kunnen vier gebieden worden onderscheiden.

- **Het lineair-elastische gebied** – traject OA
Over dit gedeelte is het diagram praktisch recht. Tot punt A blijkt er een evenredigheid (*lineair verband*) tussen de kracht F en verlenging $\Delta\ell$. Bij opheffen van de belasting in A zal hetzelfde traject in omgekeerde richting worden doorlopen tot punt O weer is bereikt. Met andere woorden, na het wegnemen van de belasting veert de staaf terug naar zijn oorspronkelijke lengte. Een dergelijk gedrag noemt men *elastisch*.

- **Het vloeigebied of plastische gebied** – traject AB

Deel AB van het diagram vertoont gewoonlijk enkele ‘hobbels’ maar verloopt verder nagenoeg

horizontaal. Dit betekent dat de verlenging van de staaf toeneemt bij gelijkblijvende belasting. Dit verschijnsel noemt men het *vloeien* van het materiaal.

- **Het verstevigingsgebied** – traject BC

Als de vervorming erg groot wordt kan na het vloeien de kracht weer gaan toenemen.

- **Het insnoeringsgebied** – traject CD

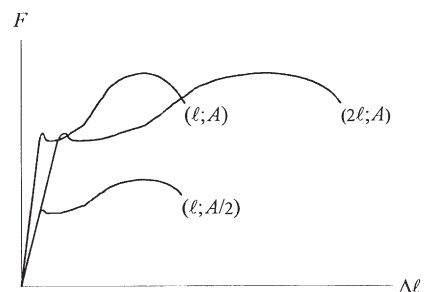
Voorbij C neemt de belasting af bij toenemende verlenging. De staaf vertoont plaatselijk een *insnoering* (figuur 1.4) die toeneemt totdat bij D breuk optreedt.

Door het breken van de staaf valt de belasting weg en veert de proefstaaf een stukje elastisch terug.

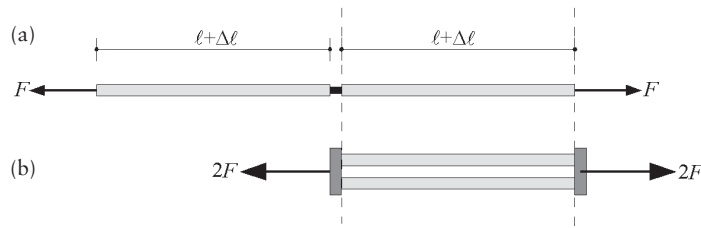
Wanneer ergens tussen A (de *evenredigheidsgrens*) en D (het *breekpunt*) de belasting wordt weggenomen veert de proefstaaf een stukje elastisch terug. De retourkromme is nagenoeg een rechte lijn evenwijdig aan OA. In figuur 1.3 is dit met een stippellijn aangegeven.

Na het wegnemen van de belasting vertoont de staaf een *blijvende* of *plastische* verlenging $\Delta\ell_p$; de *elastische* verlenging was $\Delta\ell_e$.

Het F - $\Delta\ell$ -diagram is niet alleen afhankelijk van het materiaal, maar ook van de afmetingen van de proefstaaf, te weten de lengte ℓ van het beschouwde prismatische staafdeel en de oppervlakte A van de dwarsdoorsnede. In figuur 1.5 zijn de diagram-



Figuur 1.5 F - $\Delta\ell$ -diagrammen bij verschillende staafafmetingen.



Figuur 1.6 (a) Voor een tweemaal zo lange staaf is bij dezelfde kracht de verlenging tweemaal zo groot. (b) Bij een tweemaal zo grote doorsnede is de voor eenzelfde verlenging benodigde kracht tweemaal zo groot.

men getekend voor drie staven van hetzelfde materiaal maar met verschillende afmetingen.

Als de (prismatische) staaf tweemaal zo lang wordt gekozen vindt men bij dezelfde kracht F een verlenging die tweemaal zo groot is. Dat kan men inzien door zich het gedrag van twee achter elkaar bevestigde staven voor te stellen, zoals getekend in figuur 1.6a. De totale verlenging zal de som van de verlengingen van elk der staven zijn. De verlenging $\Delta\ell$ is dus evenredig met de staaf lengte ℓ .

Om de invloed van de staaf lengte te elimineren zet men langs de horizontale as niet $\Delta\ell$, maar $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$ uit. De (dimensieloze) vervormingsgrootte:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\text{verlenging}}{\text{oorspronkelijke lengte}}$$

noemt men de *specifieke lengteverandering* of *rek* van de staaf. De specifieke lengteverandering die een verkorting inhoudt heet *stuik*.

Als de staafdoorsnede A tweemaal zo groot wordt is voor eenzelfde verlenging $\Delta\ell$ een tweemaal zo grote kracht nodig. Daartoe kan men zich het gedrag van de twee evenwijdige staven in figuur 1.6b indenken. Bij een verlenging $\Delta\ell$ zit in elke staaf een normaalkracht F en is de totale belasting op het systeem van twee staven $2F$. De benodigde kracht F is dus evenredig met de oppervlakte A van de dwarsdoorsnede van de staaf.

Om de invloed van de dwarsdoorsnede te elimineren zet men langs de verticale as nu niet F , maar $\sigma = F/A$ uit. De grootte:

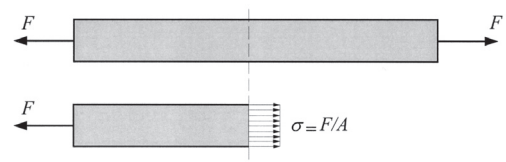
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

is de *normaalspanning* in de doorsnede.

In het algemeen zal de normaalspanning over de doorsnede variëren en moet men $\sigma = F/A$ opvatten als de ‘*gemiddelde normaalspanning*’ in de doorsnede.

Is de doorsnede *homogeen* (dat wil zeggen bestaat de staafdoorsnede overal uit hetzelfde materiaal) en ligt de beschouwde doorsnede voldoende ver van de staafeinden, waar de belasting aangrijpt (dit zijn ‘*storingsgebieden*’), dan blijkt de normaalspanning ten gevolge van de trekkracht constant over de doorsnede, zie figuur 1.7.

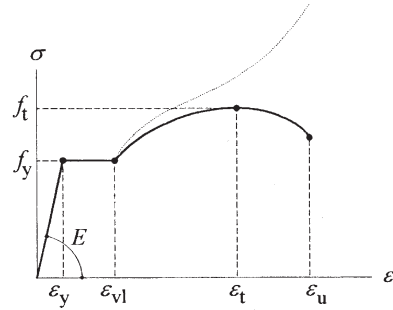
Door het kracht-verlenging-diagram (F - $\Delta\ell$ -diagram) om te werken tot een *spanning-rek-diagram* (σ - ε -diagram) elimineert men de invloed



Figuur 1.7 De normaalspanning $\sigma = F/A$ in een doorsnede is constant in een homogene doorsnede.

van de staafafmetingen op de uitkomst van de trekproef. Proefstaven van verschillende afmetingen leiden tot vrijwel dezelfde σ - ε -diagrammen¹.

De experimenteel gevonden waarden zijn uiteraard aan spreiding onderhevig. Daarnaast zijn zij afhankelijk van uitvoeringsomstandigheden, zoals bijvoorbeeld de snelheid van belasten. Verder speelt bij alle materialen de temperatuurgevoeligheid een rol en worden de resultaten bij bijvoorbeeld hout en beton beïnvloed door vochtigheid.



Figuur 1.8 Een σ - ε -diagram met een duidelijk vloeigebied.

1.2 Spanning-rek-diagrammen

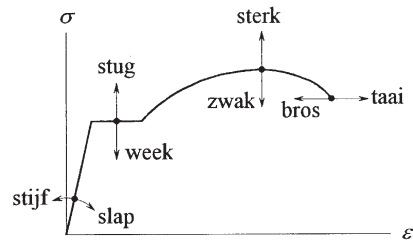
In figuur 1.8 is een σ - ε -diagram met een duidelijk vloeigebied getekend. De specifieke grootheden waarmee de vorm van het diagram min of meer is vastgelegd zijn:

- f_y – de vloeigrens²;
- f_t – de treksterkte³;
- ε_y – vloeirek: dit is de rek waarbij het vloeitrajec begint;
- ε_{vl} – de rek aan het einde van het vloeitrajec;
- ε_t – de rek behorende bij de treksterkte f_t ;
- ε_u – de breukrek: dit is de rek waarbij breuk optreedt.

In het elastische gebied is er een lineair verband tussen de spanning σ en rek ε :

$$\sigma = E\varepsilon$$

De evenredigheidsfactor E is een *materiaalconstante* en noemt men de *elasticiteitsmodulus*. De elasticiteitsmodulus karakteriseert de weerstand (*stijfheid*) van het materiaal tegen *vervorming door lengteverandering*. In het σ - ε -diagram vindt men de elasticiteitsmodulus terug als de helling $E = \sigma/\varepsilon$ van de lineair-elastische tak.



Figuur 1.9 Materiaaleigenschappen.

Omdat de rek ε dimensieloos is heeft de elasticiteitsmodulus E de dimensie van een spanning (kracht/oppervlakte).

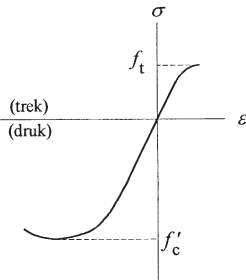
In figuur 1.9 zijn in het σ - ε -diagram de begrippen stijfheid, sterkte, enzovoort aangegeven.

- een *stijf* materiaal heeft een grotere elasticiteitsmodulus E dan een *slap* materiaal;
- een *stug* materiaal heeft een hogere vloeigrens f_y dan een *week* materiaal;
- een *sterk* materiaal heeft een hogere treksterkte f_t dan een *zwak* materiaal;
- een *taai* materiaal heeft een grotere breukrek ε_u dan een *bros* materiaal.

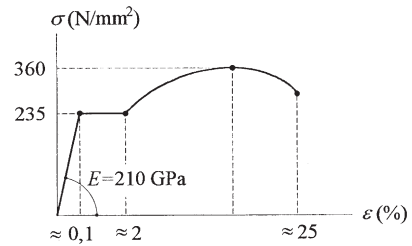
¹ Vanwege het plaatselijke karakter van de insnoering kan de breukrek per proefstaaf verschillen.

² Sterktewaarden in het σ - ε -diagram duidt men in de voorschriften aan met de kernletter f in plaats van σ .

³ Voor het berekenen van de spanning σ wordt de kracht F gedeeld door de oppervlakte A van de oorspronkelijke doorsnede. Omdat de doorsnede kleiner wordt, aanvankelijk door dwarscontractie maar daarna nog veel sterker door insnoering, zijn de werkelijke spanningen groter. In figuur 1.8 is dat met een stippellijn aangegeven. Voor de bouwpraktijk zijn deze werkelijke spanningen niet echt belangrijk.



Figuur 1.10 Het σ - ϵ -diagram voor een bros materiaal.



Figuur 1.11 Het σ - ϵ -diagram voor de staalsoort Fe 360.

Tot de taai materialen kunnen de meeste metalen worden gerekend, zoals staal, aluminium, enzovoort. De treksterkte f_t is in het algemeen aanzienlijk groter dan de spanning waarbij breuk optreedt. Bij metalen is het σ - ϵ -diagram voor druk meestal gelijk aan dat voor trek en is de druksterkte¹ f'_c even groot als de treksterkte f_t .

Materialen waarbij na geringe rek reeds breuk optreedt worden bros genoemd. Voorbeelden hiervan zijn beton, steen, gietijzer en glas. Bij steenachtige materialen zijn de σ - ϵ -diagrammen voor trek en druk gewoonlijk verschillend en is de druksterkte f'_c meestal groter dan de treksterkte f_t , zie figuur 1.10.

Ter illustratie volgen hieronder voor een aantal materialen voorbeelden van σ - ϵ -diagrammen.

Staal. In figuur 1.11 is het σ - ϵ -diagram voor staal Fe 360 gegeven. Het diagram is niet op schaal getekend. Voor respectievelijk de treksterkte en vloeigrens houdt men aan:

$$f_t = 360 \text{ N/mm}^2 \text{ en } f_y = 235 \text{ N/mm}^2$$

De elasticiteitsmodulus is:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

De rek waarbij vloeien optreedt is eenvoudig te berekenen:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{235 \text{ N/mm}^2}{210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2} = 0,00112$$

Wordt de vloeirek – een dimensieloze grootheid – in procenten uitgedrukt, dan is:

$$\epsilon_y = 0,112\% \approx 0,1\%$$

Het versterigingsgebied begint bij een rek ϵ_{vl} die ongeveer 20 maal zo groot is:

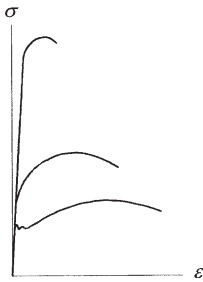
$$\epsilon_{vl} \approx 2\%$$

en de breukrek ϵ_u is weer 10 tot 15 maal groter:

$$\epsilon_u \approx 25\%$$

De constructiestaalsoort Fe 360 is een taai materiaal met een uitgesproken vloeigrens en een betrekkelijk lage treksterkte. Door het toevoegen van kleine hoeveelheden legeringselementen tijdens de staalbereiding of door koud deformeren kunnen staalsoorten met aanzienlijk hogere treksterkten

¹ In de mechanica is het gebruikelijk normaalspanningen positief te noemen wanneer het trekspanningen zijn. Wanneer men overwegend met drukspanningen heeft te maken, ontstaat soms de behoefte drukspanningen positief te noemen. Voor de tekenwisseling wordt dan het accentteken gebruikt. Zie ook het deel *Mechanica: Evenwicht*, paragraaf 6.5.



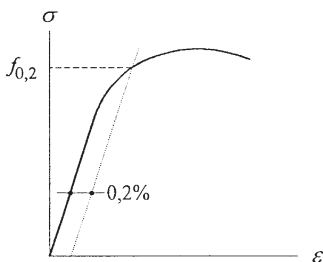
Figuur 1.12 σ - ε -diagrammen voor verschillende staalsoorten.

worden gekregen. In figuur 1.12 zijn (min of meer op schaal) σ - ε -diagrammen voor verschillende staalsoorten getekend. Het volgende blijkt:

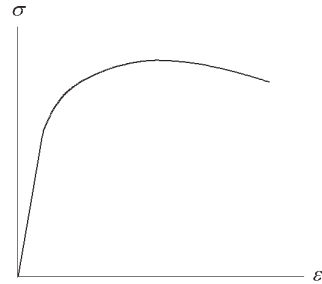
- Alle staalsoorten hebben dezelfde elasticiteitsmodulus E .
- Hoe hoger de treksterkte f_t , des te kleiner de breukrek ε_u ; met andere woorden: bij toenemende sterkte neemt de taaiheid af.
- Bij staalsoorten met een hoge treksterkte (Fe 600 en hoger) is er een geleidelijke overgang van het lineair-elastische gebied naar het verstevigingsgebied en ontbreekt het vloeitraject.

Voor staalsoorten waarbij het vloeitraject ontbreekt stelt men de vloeigrens f_y gelijk aan de 0,2%-rekgrens $f_{0,2}$, dit is de spanning waarbij, na het wegnemen van de belasting, nog een blijvende rek van 0,2 % resteert, zie figuur 1.13:

$$f_y = f_{0,2}$$



Figuur 1.13 De 0,2%-rekgrens $f_{0,2}$.



Figuur 1.14 Voorbeeld van een σ - ε -diagram voor aluminium

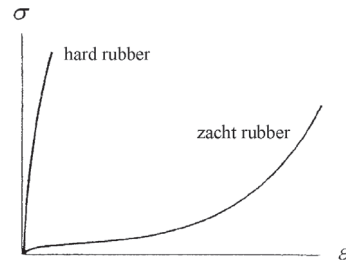
Aluminium. Aluminium is een taai materiaal, dat wil zeggen dat het grote vervormingen kan ondergaan alvorens breuk optreedt, maar er is geen duidelijke vloeigrens aan te geven, zie figuur 1.14. Evenals bij de hoogwaardige staalsoorten werkt men hier met de 0,2%-rekgrens.

De elasticiteitsmodulus is:

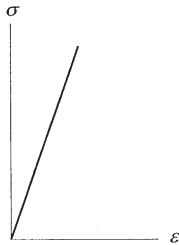
$$E = 70 \text{ GPa}$$

Aluminium heeft een ongeveer driemaal zo kleine elasticiteitsmodulus als staal en gedraagt zich dus driemaal zo slap. Dit betekent dat de vervormingen van een in aluminium uitgevoerde constructie in het elastische gebied driemaal zo groot zijn als die van dezelfde constructie uitgevoerd in staal. Evenals bij staal zijn de eigenschappen van aluminium sterk afhankelijk van legeringselementen, bereidingswijzen en nabehandelingen.

Rubber. Tot zeer grote rekken (10 à 20%) bestaat er een lineair verband tussen spanning en rek.



Figuur 1.15 σ - ε -diagrammen voor twee soorten rubber.



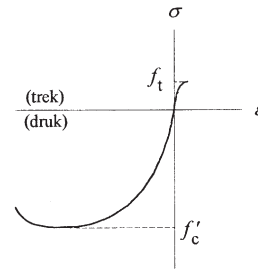
Figuur 1.16 σ - ε -diagram voor glas.

Daarna is het gedrag afhankelijk van de rubbersoort, zie figuur 1.15. In het niet-lineaire gebied kan rubber zich nog lang elastisch gedragen. Bij belasten en ontlasten wordt dan dezelfde weg in het σ - ε -diagram gevolgd.

Sommige zachte rubbersoorten kunnen enorm uitrekken. De breukrek kan wel 800% bedragen. Vlak voor breuk is er vaak een duidelijke toename van de stijfheid. Dit gedrag is eenvoudig te controleren met behulp van een elastiekje.

Glas. Glas gedraagt zich lineair elastisch tot breuk. Een plastisch gebied met versteviging ontbreekt, zie figuur 1.16. Glas is een ideaal bros materiaal. De elasticiteitsmodulus en treksterkte zijn afhankelijk van de soort glas. Hoe dunner het glas, hoe sterker het is. De treksterkte van glasvezels kan meer dan 100 maal zo groot zijn als die van plaatglas.

Beton. Beton is een steenachtig materiaal met een geringe treksterkte en een grote druksterkte, zie figuur 1.17. Voor sterkteberekeningen gebruikt men vergaand geschematiseerde σ - ε -diagrammen. Voor het berekenen van de vervormingen veronderstelt men een lineair-elastisch materiaalgedrag, maar gebruikt daarbij een elasticiteitsmodulus waarin allerlei tijdsafhankelijke effecten zijn verdisconteerd. Beton gedraagt zich zes- tot achtmaal zo slap als staal.

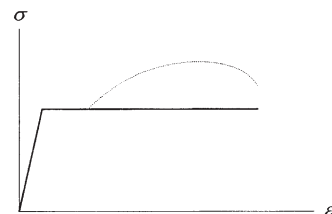


Figuur 1.17 Voorbeeld van een σ - ε -diagram voor beton.

Hout. Hout is een *anisotroop* materiaal: door zijn vezelstructuur zijn de materiaaleigenschappen niet in alle richtingen gelijk¹. Het σ - ε -diagram voor hout is dan ook minder duidelijk. Behalve van de vezelrichting is het afhankelijk van vele factoren, waaronder de vochtigheid en belastingssnelheid. Bovendien is het gedrag voor trek en druk verschillend. Op trek gedraagt hout zich bros en breekt het plotseling. Op druk belast blijkt het een vrij taai materiaal; de vezels gaan plooien, maar blijven weerstand bieden.

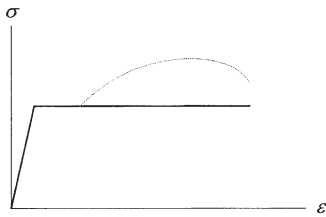
1.3 Wet van Hooke

Voor materialen met een voldoende lang vloeitraject (taai materialen zoals bijvoorbeeld staal Fe 360) vereenvoudigt men het σ - ε -diagram vaak tot dat in figuur 1.18 voor een *elastisch-plastisch* materiaal.

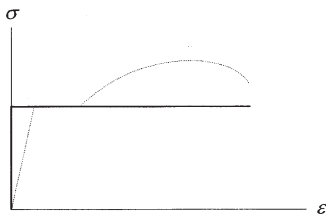


Figuur 1.18 σ - ε -diagram voor een elastisch-plastisch materiaal.

¹ Bij een *isotroop* materiaal zijn de materiaaleigenschappen in alle richtingen gelijk. Bij een *anisotroop* materiaal zijn de materiaaleigenschappen richtingsafhankelijk.



Figuur 1.18 σ - ϵ -diagram voor een elastisch-plastisch materiaal.



Figuur 1.19 σ - ϵ -diagram voor een star-plastisch materiaal.

In de bouwpraktijk is men met name geïnteresseerd in de situatie waarbij in een constructie of onderdeel daarvan een zogenaamde *grenstoestand*¹ wordt bereikt. Men onderscheidt daarbij *uiterste grenstoestanden* en *bruikbaarheidsgrenstoestanden*:

- *uiterste grenstoestanden* zijn toestanden waarbij de constructie of een deel daarvan bezwijkt. Dit kan door verlies van evenwicht (bijvoorbeeld ten gevolge van kantelen, glijden, opdrijven, instabiliteit) of door verlies van draagkracht doordat de constructie in één of meer doorsneden niet sterk genoeg is om de optredende krachten over te kunnen brengen.
- *bruikbaarheidsgrenstoestanden* zijn toestanden waarin de constructie of een deel daarvan niet meer doelmatig functioneert, bijvoorbeeld als gevolg van te grote vervormingen, trillingen, scheurvorming, enzovoort, meestal nog lang voordat bezwijken optreedt.

In de *uiterste grenstoestand*, waarbij de constructie bezwijkt doordat één of meer doorsneden niet sterk genoeg zijn om de optredende krachten over te kunnen brengen, zal het materiaal in de betreffende doorsneden tot het uiterste worden belast, bij taaie materialen tot ver in het plastische gebied. De bijbehorende bezwijkbelasting berekent men met de zogenaamde *plasticiteitsleer*. Omdat de lineair-elastische tak hierbij een ondergeschikte rol speelt vereenvoudigt men het σ - ϵ -diagram vaak nog verder tot dat van een *star-plastisch materiaal*, zie figuur 1.19.

Bij de controle van een *bruikbaarheidsgrenstoestand* zijn de vervormingen in het algemeen nog zo klein zijn dat men zich op de lineair-elastische tak van het σ - ϵ -diagram bevindt, voldoende ver van de vloeigrens. Berekeningen met betrekking tot de bruikbaarheidsgrenstoestanden worden daarom uitgevoerd volgens de lineaire elasticiteitstheorie, gebaseerd op de evenredigheid tussen spanning σ en vervorming ϵ :

$$\sigma = E\epsilon$$

De evenredigheid tussen spanning en vervorming werd gevonden door Robert Hooke (1635-1703) en wordt de *wet van Hooke* genoemd. Hooke formuleerde de wet als ‘ut tensio sic vis’ (zo trek, zo kracht), en publiceerde deze in 1678 in de vorm van een anagram: ‘ceiiniiosssttuv’.

$\sigma = E\epsilon$ is de wet van Hooke in zijn eenvoudigste vorm².

Wees er op bedacht dat de aanduiding ‘wet’ van Hooke enigszins misleidend kan zijn. Het karakter van deze wet is heel anders dan die van algemeen geldende wetten zoals de wet van Newton. De wet van Hooke is niet meer dan een goede weergave van bepaalde experimenteel gevonden resultaten.

¹ Zie ook het deel *Mechanica: Evenwicht*, paragraaf 6.2.4.

² In hoofdstuk 6, waar de schuifspanningen ten gevolge van wringing worden behandeld, komt de wet van Hooke in een geheel andere gedaante naar voren. Een behandeling van de wet van Hooke in zijn algemene vorm geschiedt in het deel *Mechanica: Statische onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse*.

Dit boek maakt deel uit van een serie mechanicastudieboeken voor de opleidingen Bouwkunde en Weg- en Waterbouwkunde (Civiele Techniek) in het hoger onderwijs (hbo en technische universiteit):

- Mechanica: Evenwicht
- Mechanica: Spanningen, vervormingen, verplaatsingen
- Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse

Dit boek biedt een grondige behandeling van het gedrag van staven en constructies voor wat betreft spanningen, vervormingen en verplaatsingen. Na een bespreking van materiaalgedrag en doorsnedegrootheden wordt het gedrag van achtereenvolgens op buiging en extensie belaste staven, op wringing belaste staven en tenslotte vakwerkconstructies toegelicht.

Uitgebreid wordt ingegaan op de knooppuntverplaatsingen in vakwerken op basis van berekening van de lengteverandering van de staven. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een grafische aanpak met behulp van een Williot-diagram.

Het op juiste wijze toepassen van mechanica is een vaardigheid die men vooral opdoet door uitgebreide oefening. Hiertoe biedt dit boek een zeer groot aantal uitgewerkte voorbeelden en vraagstukken, die zodanig zijn gestructureerd dat het doorwerken ervan resulteert in kennismaking met alle aspecten van dit vakgebied. De bijbehorende opgaven zijn beschikbaar via www.mechanicaspanningen.nl.

De auteur heeft jarenlange ervaring in het doceren en doseren van mechanicaonderwijs aan de opleiding Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft.

ISBN 978-90-2442-929-5



9 789024 429295

www.mechanicaspanningen.nl
www.boomhogeronderwijs.nl

