

WISKUNDE VOOR HET HOGER TECHNISCH ONDERWIJS

deel 1

LOTHAR PAPULA

2e druk

Meer informatie over deze en andere uitgaven kunt u verkrijgen bij:
BIM Media B.V.
Postbus 16262
2500 BG Den Haag
tel.: (070) 304 67 77
www.bimmedia.nl

Originally published in the German language by Vieweg+Teubner, 65189 Wiesbaden, Germany, as
Lothar Papula: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1, 12. Auflage*
© Vieweg+Teubner | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Springer Fachmedien is part of Springer Science+Business Media

© Nederlandse vertaling 2011 BIM Media, Den Haag
Academic Service is een imprint van BIM Media bv.

1e druk, mei 1993 (11 oplagen)
2e druk, 1e oplage augustus 2011
2e oplage augustus 2013

Vertaling: R.M.D. Bersen, E. Bogers
Zetwerk: PerfectService, Schoonhoven
Omslagontwerp: Carlito's Design, Amsterdam

ISBN 978 90 395 2647 7
NUR 123/918

Alle rechten voorbehouden. Alle intellectuele eigendomsrechten, zoals auteurs- en databankrechten, ten aanzien van deze uitgave worden uitdrukkelijk voorbehouden. Deze rechten berusten bij BIM Media bv en de auteur.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet gestelde uitzonderingen, mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16 h Auteurswet, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich te wenden tot de Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.cedar.nl/pro). Voor het overnemen van een gedeelte van deze uitgave ten behoeve van commerciële doeleinden dient men zich te wenden tot de uitgever.

Hoewel aan de totstandkoming van deze uitgave de uiterste zorg is besteed, kan voor de afwezigheid van eventuele (druk)fouten en onvolledigheden niet worden ingestaan en aanvaarden de auteur(s), redacteur(en) en uitgever deswege geen aansprakelijkheid voor de gevolgen van eventueel voorkomende fouten en onvolledigheden.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the publisher's prior consent.

While every effort has been made to ensure the reliability of the information presented in this publication, BIM Media neither guarantees the accuracy of the data contained herein nor accepts responsibility for errors or omissions or their consequences.

Voorwoord

De delen 1 en 2 van *Wiskunde voor het Hoger Technisch Onderwijs* vormen een compacte wiskundemethode voor het hoger technisch onderwijs.

Keuze van de stof in deel 1

De ervaringen van de afgelopen jaren leren dat studenten nog altijd een zeer uiteenlopende en doorgaans onvoldoende basiskennis van de wiskunde bezitten. Vooral op het gebied van de algebra zijn er veel hiaten. De redenen hiervoor zijn onder andere:

- de veranderde wijze waarop het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs wordt onderwezen;
- de verminderde interesse voor het vak wiskunde als examenvak in de hogere klassen van het voortgezet onderwijs.

Een naadloze overgang van het voortgezet onderwijs naar het hoger onderwijs is daarom zonder extra hulp voor het vak wiskunde vaak erg moeilijk. Dit eerste deel van *Wiskunde voor het Hoger Technisch Onderwijs* biedt deze benodigde hulp door bepaalde gebieden van de elementaire wiskunde te behandelen, en slaat op die manier een brug tussen het voortgezet en het hoger onderwijs. Deze opzet heeft zich in de voorgaande jaren bewezen.

In dit eerste deel komen de volgende onderwerpen aan de orde:

- algemene grondslagen (onder andere vergelijkingen en ongelijkheden, stelsels van lineaire vergelijkingen, het binomium van Newton);
- vectoralgebra (eerst in het platte vlak en daarna in de driedimensionale ruimte);
- functies en krommen (als fundament voor de differentiaal- en integraalrekening);
- differentiaalrekening (met talrijke voorbeelden uit natuurwetenschap en techniek);
- integraalrekening;
- oneindige reeksen en Taylorreeksen;
- complexe getallen en functies.

Benadering van de stof

De keuze van de leerstof is gebaseerd op de volgende overwegingen:

- hoewel wiskundige methoden in de technisch-wetenschappelijk disciplines een belangrijke rol spelen, zijn het in de eerste plaats (onmisbare) hulpmiddelen;
- vanwege veranderingen in het voortgezet en hoger onderwijs de toelatingseisen en de daarmee gepaard gaande hiaten in de kennis, mag de student niet ‘overvoerd’ worden.

Daarom wordt de wiskunde op een eenvoudige, aanschouwelijke en gemakkelijk te begrijpen manier gepresenteerd. Begrippen, relaties, stellingen en formules worden verduidelijkt door talloze voorbeelden uit natuurwetenschap en techniek, en aan de hand van een groot aantal illustraties.

De oefenopgaven aan het eind van elk hoofdstuk (gerangschikt naar paragraaf) vormen een belangrijk bestanddeel van deze methode. De oplossingen, vaak van uitvoerig commentaar voorzien, zijn opgenomen in de bijlage en stellen studenten in staat hun uitwerkingen te controleren.

De illustraties zijn verder verbeterd en maken de voorbeelden nog duidelijker. Dit geldt vooral voor de vele extra voorbeelden in het hoofdstuk over machtreeksen.

Notatie en typografie

Onderdelen die centraal staan, zoals definities, stellingen, formules, samenvattingen en voorbeelden zijn op een speciale manier weergegeven:

- definities, stellingen, formules, tabellen en samenvattingen zijn omkaderd en van een grijze achtergrond voorzien;
- begin en einde van een voorbeeld worden aangegeven met een blokje ■

Bij afbeeldingen van vlakken en ruimtelijke lichamen zijn verschillende grijsinten gebruikt om een duidelijke indruk te geven.

Over het gebruik van wiskunde-software

Zowel in het hoger onderwijs als in de praktijk wordt steeds vaker software zoals Matlab, Maple, Mathcad of Mathematica ingezet voor de wiskundige oplossing van technisch-wetenschappelijke problemen. Dergelijke programma's kunnen voor studenten een nuttig en zinvol hulpmiddel zijn, bijvoorbeeld als controle achteraf van met de hand gemaakte oplossingen van de oefenopgaven. De meeste opgaven in dit leerboek kunnen op deze manier probleemloos worden opgelost.

Wijzigingen ten opzichte van de vorige druk

Deze nieuwe druk is geheel herzien en uitgebreid. Nieuw in dit deel is het hoofdstuk over complexe getallen en functies, dit bevond zich eerst in deel 2.

Den Haag, voorjaar 2011

De uitgever

Inhoud

1 Algemene grondbegrippen	1
1.1 Enkele basisbegrippen in de verzamelingenleer	1
1.1.1 Definitie en beschrijving van een verzameling	1
1.1.2 Operaties op verzamelingen	3
1.2 De verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$	5
1.2.1 De reële getallen en hun eigenschappen	5
1.2.2 Ordening van getallen, ongelijkheid, absolute waarde	6
1.2.3 Deelverzamelingen en intervallen	7
1.3 Vergelijkingen	8
1.3.1 Lineaire vergelijkingen	9
1.3.2 Tweedegraads vergelijkingen	9
1.3.3 Vergelijkingen van de derde en hogere graad	10
1.3.4 Wortelvergelijkingen	12
1.3.5 Modulusvergelijkingen	13
1.4 Ongelijkheden	18
1.5 Stelsels lineaire vergelijkingen	21
1.5.1 Een voorbeeld als inleiding	21
1.5.2 De eliminatiemethode van Gauss	24
1.5.3 Een voorbeeld van een toepassing: de berekening van een elektrisch netwerk	33
1.6 Het binomium van Newton	34
1.7 Opgaven	38
2 Vectoralgebra	43
2.1 Basisbegrippen	43
2.1.1 Definitie van een vector	43
2.1.2 Gelijkheid van vectoren	44
2.1.3 Parallele, anti-parallele en collineaire vectoren	45
2.1.4 Vectoroperaties	46
2.2 Rekenen met vectoren in het platte vlak	51
2.2.1 Het ontbinden van een vector in componenten	51
2.2.2 Vectoroperaties	55
2.2.3 Het inwendig product van twee vectoren	58
2.2.4 Lineair onafhankelijke vectoren	63
2.2.5 Een voorbeeld van een toepassing: de resultante van een in een vlak werkend krachtsysteem	65
2.3 Rekenen met vectoren in de 3-dimensionale ruimte	67
2.3.1 Het ontbinden van een vector in componenten	68
2.3.2 Vectoroperaties	71
2.3.3 Het inwendig product van twee vectoren	75
2.3.4 Het uitwendig product (of uitproduct) van twee vectoren	84

2.3.5	Blokproduct	93
2.3.6	Lineair onafhankelijke vectoren	96
2.4	Toepassingen in de meetkunde	99
2.4.1	De vectorvoorstelling van een lijn	99
2.4.2	Vectorvoorstelling van een vlak	110
2.5	Opgaven	128
3	Funcities en krommen	139
3.1	Definitie en voorstelling van een functie	139
3.1.1	Definitie van een functie	139
3.1.2	Voorstelling van een functie	140
3.2	Eigenschappen van functies	144
3.2.1	Nulpunten	144
3.2.2	Symmetrie	145
3.2.3	Monotonie	146
3.2.4	Periodiciteit	150
3.2.5	Inverse functies	151
3.3	Coördinatentransformaties	156
3.3.1	Een voorbeeld als inleiding	156
3.3.2	Translatie van een cartesisch coördinatenstelsel	156
3.3.3	De transformatie van cartesische coördinaten in poolcoördinaten	160
3.4	Limiet en continuïteit van een functie	165
3.4.1	Rijen reële getallen	165
3.4.2	Limiet van een functie	169
3.4.3	Continuïteit van een functie	176
3.4.4	Discontinuïteiten (gaten, polen, sprongen)	178
3.5	Polynoomfuncties (veeltermen)	181
3.5.1	Definitie van een polynoomfunctie	181
3.5.2	Constante en lineaire functies	182
3.5.3	Tweedegraads functies	184
3.5.4	Polynoomfuncties van een hogere graad	189
3.5.5	Het Horner-schema en het berekenen van de nulpunten van een polynoom	193
3.5.6	Interpolatie met polynomen	197
3.5.7	Een toepassingsvoorbeeld: buigingslijn (elastische lijn) van een balk	202
3.6	Gebroken rationale functies	203
3.6.1	Definitie van een gebroken rationale functie	203
3.6.2	Nulpunten, polen, ‘gaten’ in het domein	204
3.6.3	Het asymptotisch gedrag van een rationale functie als x oneindig groot wordt	209
3.6.4	Een toepassing: de capaciteit van een bolcondensator	212
3.7	Machtsfuncties en wortelfuncties	213
3.7.1	Machtsfuncties met gehele exponenten	213
3.7.2	Wortelfuncties	215
3.7.3	Machtsfuncties met rationale exponenten	217
3.7.4	Toepassingsvoorbeeld: de versnelling van een elektron in een elektrisch veld	219

3.8	Vergelijkingen van kegelsneden	219
3.8.1	Weergave van een kegelsnede door een algebraïsche vergelijking van de tweede graad met constante coëfficiënten	219
3.8.2	De cirkel	220
3.8.3	De ellips	221
3.8.4	De hyperbool	223
3.8.5	De parabool	225
3.8.6	Voorbeelden van kegelsneden	227
3.9	Goniometrische functies	231
3.9.1	Basisbegrippen	231
3.9.2	Sinus- en cosinusfunctie	236
3.9.3	Tangens- en cotangensfunctie	237
3.9.4	Belangrijke relaties tussen de goniometrische functies	239
3.9.5	Toepassingen	240
3.10	Cyclometrische functies	258
3.10.1	Het inverteren van de goniometrische functies	258
3.10.2	De functie arcsinus	259
3.10.3	De functie arccosinus	260
3.10.4	De functies arctangens en arccotangens	261
3.10.5	Goniometrische vergelijkingen	264
3.11	Exponentiële functies	266
3.11.1	Basisbegrippen	267
3.11.2	Definitie en eigenschappen van exponentiële functies	267
3.11.3	Speciale functietypen die vaak toegepast worden	269
3.12	Logaritmische functies	279
3.12.1	Basisbegrippen	279
3.12.2	Definitie en eigenschappen van logaritmische functies	281
3.12.3	Exponentiële en logaritmische vergelijkingen	285
3.13	Hyperbolische functies en inverse hyperbolische functies	287
3.13.1	Hyperbolische functies	287
3.13.2	Areafuncties	291
3.14	Opgaven	295
4	Differentiaalrekening	307
4.1	Differentieerbaarheid van een functie	307
4.1.1	Het probleem van de raaklijn aan een kromme	307
4.1.2	De afgeleide van een functie	308
4.1.3	De afgeleiden van de elementaire functies	311
4.2	Regels voor het differentiëren	314
4.2.1	De factorregel	314
4.2.2	De somregel	315
4.2.3	De productregel	316
4.2.4	De quotiëntregel	318
4.2.5	De kettingregel	319
4.2.6	Combinatie van meerdere regels voor het differentiëren	325
4.2.7	Logaritmisch differentiëren	326

4.2.8	De afgeleide van een inverse functie	328
4.2.9	Het differentiëren van impliciete functies	329
4.2.10	De differentiaal van een functie	331
4.2.11	Hogere afgeleiden	333
4.2.12	De afgeleide van een functie (kromme) in parametervoorstelling	334
4.2.13	De afgeleide van een in poolcoördinaten gegeven functie (kromme)	337
4.2.14	Eenvoudige voorbeelden van toepassingen in de natuurkunde en de techniek	342
4.3	Toepassingen van de differentiaalrekening	346
4.3.1	Raaklijnen en normalen	346
4.3.2	Linearisering van een functie	348
4.3.3	Monotonie en kromming van een grafiek (kromme)	351
4.3.4	Karakteristieke punten van een kromme	360
4.3.5	Extreembepalingen	372
4.3.6	Onderzoek van krommen	377
4.3.7	Het oplossen van een vergelijking met de benaderingsmethode van Newton-Raphson	383
4.4	Opgaven	391
5	Integraalrekening	399
5.1	Integreren als inverse operatie van differentiëren	399
5.2	Het bepalen van een oppervlakte: de bepaalde integraal	402
5.2.1	Het probleem van het bepalen van een oppervlakte (een voorbeeld)	403
5.2.2	De bepaalde integraal	406
5.3	De onbepaalde integraal en de oppervlaktefunctie	412
5.4	De hoofdstelling van de differentiaal- en integraalrekening	415
5.5	Stamintegralen	418
5.6	Het berekenen van een bepaalde integraal met een primitieve functie	420
5.7	Elementaire integratieregels	423
5.8	Integratiemethoden	426
5.8.1	De substitutiemethode	426
5.8.2	Partiële integratie	434
5.8.3	Integreren van gebroken rationale functies door middel van breuksplitsing	440
5.8.4	Numerieke integratiemethoden	446
5.9	Oneigenlijke integralen	457
5.9.1	Oneindig integratie-interval	458
5.9.2	Integrand met oneindige functiewaarde (pool)	461
5.10	Toepassingen	465
5.10.1	Eenvoudige voorbeelden uit de natuurkunde en de techniek	465
5.10.2	Oppervlakte	470
5.10.3	Volume van een omwentelingslichaam	480
5.10.4	Booglengte van een vlakke kromme	486
5.10.5	Oppervlakte van een omwentelingslichaam (omwentelingsoppervlakken)	488
5.10.6	Arbeid en energie	493

5.10.7 Lineaire en kwadratische gemiddelden	498
5.10.8 Het zwaartepunt van homogene vlakken en lichamen	503
5.10.9 Massatraagheidsmomenten	515
5.11 Opgaven	525
6 Oneindige reeksen, machtreeksen en Taylorreeksen	535
6.1 Oneindige reeksen	535
6.1.1 Een voorbeeld als inleiding	535
6.1.2 Basisbegrippen	537
6.1.3 Convergentiecriteria	542
6.1.4 Eigenschappen van convergente resp. absoluut convergente reeksen	551
6.2 Machtreeksen	553
6.2.1 Definitie van een machtreeks	553
6.2.2 Convergentiegedrag van een machtreeks	554
6.2.3 Eigenschappen van machtreeksen	559
6.3 Taylorreeksen	560
6.3.1 Een voorbeeld als inleiding	560
6.3.2 Machtreeksontwikkeling van een functie	562
6.3.3 Toepassingen	571
6.3.4 Een voorbeeld van een toepassing: vrije val waarbij rekening wordt gehouden met de luchtweerstand	589
6.4 Opgaven	591
7 Complexe getallen en functies	597
7.1 Definitie en weergave van een complex getal	597
7.1.1 Definitie van een complex getal	597
7.1.2 Het complexe vlak	600
7.1.3 Verdere basisbegrippen	603
7.1.4 Voorstelling van een complex getal	606
7.2 Complex rekenen	617
7.2.1 De vier basisbewerkingen voor complexe getallen	617
7.2.2 Machtsverheffen	628
7.2.3 Worteltrekken	630
7.2.4 De natuurlijke logaritme	636
7.3 Toepassingen van de complexe rekenwijze	638
7.3.1 Symbolische voorstelling van trillingen in een wijzerdiagram	638
7.3.2 Symbolische berekening van een wisselstroomkring	645
7.4 Plaatskrommen in het complexe vlak	655
7.4.1 Een inleidend voorbeeld	655
7.4.2 De baan van een parameterafhankelijke complexe grootheid	656
7.4.3 Toepassingsvoorbeelden: eenvoudige netwerkfuncties	658
7.4.4 Inversie van een plaatskromme	660
7.5 Opgaven	667
Register	673

Appendix A: Oplossingen van de opgavenBeschikbaar via www.academicsservice.nl

A.1	Algemene grondbegrippen	a1
A.2	Vectoralgebra	a7
A.3	Functies en krommen	a17
A.4	Differentiaalrekening	a32
A.5	Integraalrekening	a40
A.6	Oneindige reeksen, machtreeksen en Taylorreeksen	a57
A.7	Complexe getallen en functies	a69

1 Algemene grondbegrippen

1.1 Enkele basisbegrippen in de verzamelingenleer

1.1.1 Definitie en beschrijving van een verzameling

Definitie: Een *verzameling* is een geheel van aparte onderdelen, die men elementen noemt.

We kunnen een verzameling beschrijven door haar eigenschappen op te noemen:

$$M = \{x \mid x \text{ heeft de eigenschappen } E_1, E_2, \dots, E_n\} \quad (1-1)$$

Een andere mogelijkheid is het *opnoemen* van de elementen:

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{Eindige verzameling} \quad (1-2)$$

$$M = \{a, b, c, \dots\} \quad \text{Oneindige verzameling} \quad (1-3)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ resp. $a, b, c, \dots$ zijn de elementen van de verzameling. De volgorde waarin de afzonderlijke elementen worden genoemd, speelt hierbij *geen* rol. De elementen *verschillen telkens paarsgewijs van elkaar*, zodat elk element dus slechts *eenmaal* kan voorkomen.

■ Voorbeelden

(1) $M_1 = \{x \mid x \text{ is een reëel getal en is wortel van de vergelijking } x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$

(2) $M_2 = \{x \mid x \text{ is een natuurlijk getal waarvoor geldt } -2 < x \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

(3) $M_3 = \{x \mid x \text{ is een geheel getal waarvoor geldt } x^2 < 16\}.$

Deze verzameling bestaat uit de getallen $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. We kunnen deze verzameling dus als volgt beschrijven:

$$M_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

(4) De verzameling van *natuurlijke* getallen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \blacksquare$$

Als een element a tot een verzameling A behoort, dan schrijven we:

$$a \in A : a \text{ is een element van } A \quad (1-4)$$

Als een element b *niet* tot een verzameling A behoort, schrijven we:

$$b \notin A : b \text{ is geen element van } A \quad (1-5)$$

We schrijven de oplossingen van een vergelijking op in een oplossingsverzameling $\mathcal{S}$. Het kan voorkomen dat een vergelijking *onoplosbaar* is: de oplossingsverzameling heeft dan geen enkel element en is ‘leeg’. Zo’n verzameling noemen we een *lege verzameling* en we schrijven:

$$\{\} \quad \text{lege verzameling of } \emptyset \quad (1-6)$$

■ Voorbeelden

- (1) De tweedegraads vergelijking $x^2 + 1 = 0$ heeft geen reële oplossing. De oplossingsverzameling S is dus de lege verzameling:

$$S = \{x \mid x \text{ is reëel en wortel van } x^2 + 1 = 0\} = \{ \}$$

- (2) De *nulpunten* van de sinusfunctie zijn de oplossingen van de trigonometrische vergelijking $\sin x = 0$. Deze vormen de volgende oneindige oplossingsverzameling:

$$\begin{aligned} S &= \{x \mid x \text{ is reëel en oplossing van de vergelijking } \sin x = 0\} = \\ &= \{0; \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots\} \end{aligned}$$

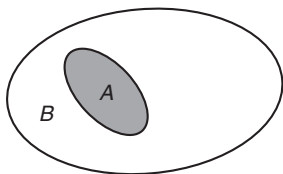
Bij de beschrijving van functies hebben we getalverzamelingen nodig die een deel van de verzameling van de reële getallen zijn (de zogenaamde intervallen). Hierdoor komen we op het begrip *deelverzameling*:

Definitie: Een verzameling A noemen we de *deelverzameling* van een verzameling B , als ieder element van A ook tot B behoort. We schrijven:

$$A \subset B \quad (1-7)$$

(Lees: A is een deelverzameling van B , of: B omvat A .)

In figuur 1-1 is deze situatie afgebeeld in een *Venn-diagram*.



Figuur 1-1 Een deelverzameling ($A \subset B$)

■ Voorbeelden

- (1) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

A is een *deelverzameling* van B , omdat de elementen 1, 3 en 5 ook tot de verzameling B behoren: $A \subset B$

- (2) $M_1 = \{0, 2, 4\}$, $M_2 = \{2, 4, 6, 8\}$

Het element $0 \in M_1$ behoort *niet* tot de verzameling M_2 . Dus is M_1 *geen* deelverzameling van M_2 . We schrijven: $M_1 \not\subset M_2$

Definitie: Twee verzamelingen A en B noemen we *gelijk* als ieder element van A ook een element van B is en omgekeerd:

$$A = B \quad (1-8)$$

(Lees: A is gelijk aan B .)

■ **Voorbeeld**

$$A = \{0, 1, 2, 5, 10\}, B = \{10, 5, 2, 0, 1\}$$

Ieder element van A is ook een element van B en omgekeerd. Dus zijn de twee verzamelingen *gelijk*: $A = B$ ■

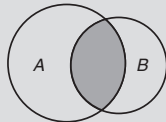
1.1.2 Operaties op verzamelingen

We bekijken nu voor *verzamelingen* de *algebraïsche operaties doorsnede* ($\cap$) en *vereninging* ($\cup$) en ook het begrip *verschilverzameling*.

Definitie: De *doorsnede* van twee verzamelingen A en B is de verzameling van alle elementen die zowel tot A als tot B behoren:

$$A \cap B = \{x \mid x \text{ en } x \in B\} \quad (1-9)$$

(Lees: A doorsneden met B)



Figuur 1-2

■ **Voorbeeld**

We zoeken die reële x -waarden die *tegelijk* aan de twee ongelijkheden $2x - 4 > 0$ en $x < 3$ voldoen:

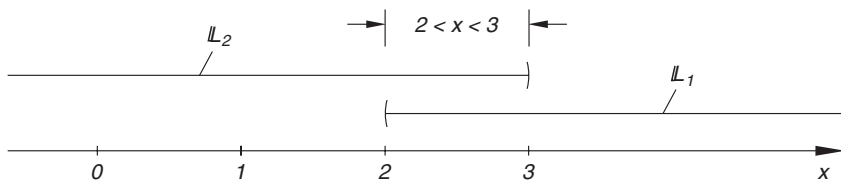
$$2x - 4 > 0, 2x > 4, x > 2 : S_1 = \{x \mid x > 2\}$$

$$x < 3 : S_2 = \{x \mid x < 3\}$$

De doorsnede van S_1 en S_2 is de oplossingsverzameling S die we zoeken:

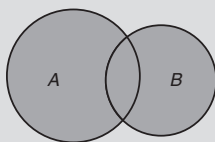
$$S = S_1 \cap S_2 = \{x \mid x > 2 \text{ en } x < 3\} = \{x \mid 2 < x < 3\}$$

Het wordt nog duidelijker als we de verzamelingen op de *getallenlijn* gaan afbeelden: de gezochte oplossingsverzameling vinden we in het gemeenschappelijke stuk van deelverzamelingen S_1 en S_2 (figuur 1-3).



Figuur 1-3

Definitie: De *vereniging* van twee verzamelingen A en B is de verzameling van alle elementen die *of* tot A , *of* tot B , *of* tot beide verzamelingen behoren.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\} \quad (1-10)$$

(Lees: A verenigd met B .)

Figuur 1-4

Opmerking

Let er op, dat ook de elementen die zowel tot A als tot B behoren, elementen zijn die tot de vereniging behoren.

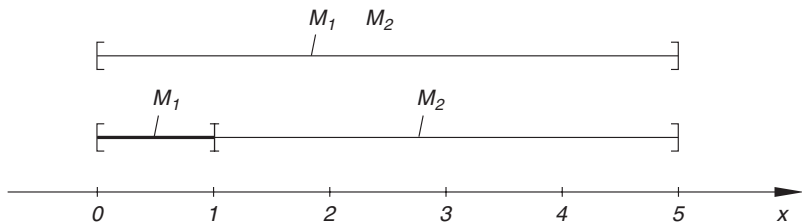
■ Voorbeelden

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 5, 6, 7\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

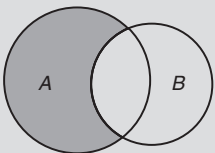
(2) $M_1 = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}, M_2 = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$

$$M_1 \cup M_2 = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$$



Figuur 1-5

Definitie: De *verschilverzameling* van twee verzamelingen A en B is de verzameling van alle elementen die wel tot A , maar niet tot B behoren:



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} \quad (1-11)$$

(Lees: A zonder de elementen van B .)

Figuur 1-6

■ Voorbeelden

$$(1) \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Dus: } \mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$(2) A = \{1, 5, 7, 10\}, B = \{0, 1, 7, 15\}$$

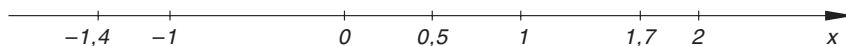
$$A \setminus B = \{5, 10\}$$

■

1.2 De verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$

1.2.1 De reële getallen en hun eigenschappen

We rekenen en meten altijd met *reële getallen*¹⁾. Deze worden aangeduid met het symbool $\mathbb{R}$ en kunnen aanschouwelijk worden gemaakt als punten op de *getallenlijn* (deze afbeelding is *bijjectief*, zie figuur 1-7).



Figuur 1-7 De reële getallen op een getallenlijn

Positieve getallen worden *rechts* van het nulpunt afgebeeld, *negatieve* getallen *links* van het nulpunt.

Op de getallenverzameling $\mathbb{R}$ zijn de volgende vier rekenoperaties (*hoofdbewerkingen*) gedefinieerd:

1. Optellen (+).
2. Aftrekken (−), de inverse operatie van optellen.
3. Vermenigvuldigen (·).
4. Delen (:), de inverse operatie van vermenigvuldigen.

De rekenoperaties voldoen aan de volgende *eigenschappen*:

Eigenschappen van de verzameling van de reële getallen

1. De *som* $a + b$, het *verschil* $a - b$, het *product* ab en het *quotiënt* $\frac{a}{b}$ van twee reële getallen a en b geeft als uitkomst weer een reëel getal.

Uitzondering: delen door het getal 0 is niet toegestaan.

2. Optellen en vermenigvuldigen zijn *commutatieve* rekenoperaties: voor willekeurige getallen $a, b \in \mathbb{R}$ geldt altijd:

¹⁾ Tot deze getallen behoren:

1. alle eindige decimale breuken (met inbegrip van de gehele getallen),
2. alle oneindige repeterende decimale breuken, en
3. alle oneindige niet-repeterende decimale breuken.

$$\left. \begin{array}{l} a + b = b + a \\ ab = ba \end{array} \right\} \text{ commutatieve eigenschap} \quad (1-12)$$

3. Optellen en vermenigvuldigen zijn *associatieve* rekenoperaties: voor willekeurige getallen $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt altijd:

$$\left. \begin{array}{l} a + (b + c) = (a + b) + c \\ a(bc) = (ab)c \end{array} \right\} \text{ associatieve eigenschap} \quad (1-13)$$

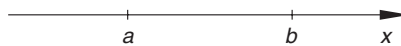
4. De *distributieve* eigenschap is:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{distributieve eigenschap} \quad (1-14)$$

1.2.2 Ordening van getallen, ongelijkheid, absolute waarde

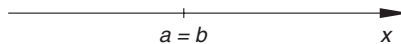
De reële getallen zijn *geordend*, dat wil zeggen: tussen twee getallen $a, b \in \mathbb{R}$ bestaat altijd één van de drie volgende relaties:

$a < b$ (a kleiner dan b)



Figuur 1-8

$a = b$ (a gelijk aan b)



Figuur 1-9

$a > b$ (a groter dan b)



Figuur 1-10

Relaties van de vorm $a < b$ of $a > b$ noemen we *ongelijkheden*. Daarbij rekenen we ook relaties van de vorm:

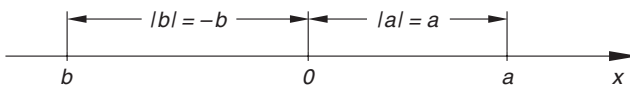
$a \leq b$ (a kleiner dan of gelijk aan b , dat wil zeggen óf $a < b$ óf $a = b$)

$a \geq b$ (a groter dan of gelijk aan b , dat wil zeggen óf $a > b$ óf $a = b$)

Opmerkingen

- (1) $a < b$ resp. ($a > b$) betekent: de afbeelding van a ligt *links* (*rechts*) van de afbeelding van b (zie de figuren 1-8 en 1-10).
- (2) $a = b$: de afbeeldingen van a en b vallen samen (zie figuur 1-9).

Met de *modulus* of absolute waarde van een reëel getal a bedoelen we de *afstand* van de afbeelding van a tot het nulpunt (figuur 1-11).



Figuur 1-11
De absolute waarde
van een getal

We schrijven hiervoor $|a|$; deze waarde is altijd positief of nul.

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & \text{voor } a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}, |a| \geq 0 \quad (1-15)$$

■ Voorbeelden

$$|3| = 3, \quad |-5| = 5, \quad |\pi| = \pi, \quad |\cos \pi| = |-1| = 1$$

■

1.2.3 Deelverzamelingen en intervallen

We noemen hier enkele belangrijke en vaak voorkomende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$:

Bijzondere getalverzamelingen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$	Verzameling van natuurlijke getallen ²⁾ met inbegrip van het getal 0.
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	Verzameling van natuurlijke getallen.
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	Verzameling van gehele getallen.
$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b} \text{ met } a \in \mathbb{Z} \text{ en } b \in \mathbb{N}\}$	Verzameling van rationale getallen.
$\mathbb{R}$	Verzameling van reële getallen.

Als we praten over het definitiegebied en het bereik van functies, hebben we bepaalde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ nodig die we *intervallen* noemen. De verschillende soorten intervallen zijn in de volgende tabel samengevat:

Samenvatting van soorten intervallen

1. Begrensde intervallen ($a < b$)

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$	gesloten interval
$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$	} halfopen interval
$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$	
$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$	open interval

2. Onbegrensde intervallen

$[a, \infty) = \{x \mid a \leq x < \infty\}$
$(a, \infty) = \{x \mid a < x < \infty\}$
$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\}$

²⁾ Het getal 0 wordt tot de natuurlijke getallen gerekend.

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$$

$$(-\infty, 0) = \mathbb{R}^-$$

$$(0, \infty) = \mathbb{R}^+$$

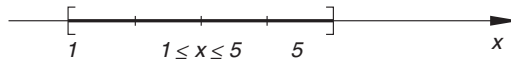
$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Opmerkingen

- (1) Bij een *gesloten* interval behoren *beide* eindpunten tot het interval, bij een *open* interval daarentegen *geen van beide* eindpunten, en bij een *halfopen* interval slechts een van beide eindpunten.
- (2) In de natuurwetenschappen en de techniek gebruikt men vaak andere symbolen voor intervallen dan in de wiskunde. Zo schrijft men bijvoorbeeld het interval $\{x \mid a < x < b\}$ vaak in de kortere vorm $a < x < b$.

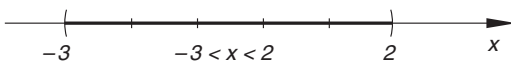
■ Voorbeelden

(1) $[1, 5]$



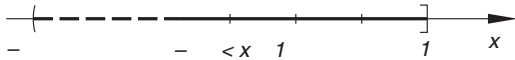
Figuur 1-12

(2) $(-3, 2)$



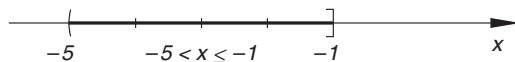
Figuur 1-13

(3) $(-\infty, 1]$



Figuur 1-14

(4) $(-5, -1]$



Figuur 1-15

■

1.3 Vergelijkingen

In deze paragraaf bespreken we in toepassingen vaak voorkomende *vergelijkingen met één onbekende*. Enkele van deze vergelijkingen zijn:

- *lineaire*, *tweedegraads* en *derdegraads* vergelijkingen
- *algebraïsche* vergelijkingen van een hogere graad
- *bi-kwadratische* vergelijkingen
- *wortelvergelijkingen*
- *modulusvergelijkingen*

Goniometrische vergelijkingen, exponentiële en logaritmische vergelijkingen worden in hoofdstuk 3 besproken nadat de overeenkomstige functies behandeld zijn.

Vaak gebruiken we voor het oplossen van een vergelijking een *benaderingsmethode*. De reden hiervoor kan zijn dat het niet mogelijk is de vergelijking *exact* op te lossen of dat de methode om de vergelijking op te lossen te veel tijd kost.

Zo'n benaderingsmethode uit de numerieke wiskunde is bijvoorbeeld de methode van *Newton-Raphson*, die we bij de toepassingen van de differentiaalrekening in hoofdstuk 4 uitgebreid zullen bespreken.

1.3.1 Lineaire vergelijkingen

Een *lineaire* vergelijking van de vorm

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1-16)$$

heeft precies één oplossing, namelijk $x_1 = b/a$

■ Voorbeeld

$$3x - 18 = -x + 6$$

$$4x = 24$$

$$x_1 = 6 \Rightarrow \text{oplossingsverzameling } \mathcal{S} = \{6\}$$

■

1.3.2 Tweedegraads vergelijkingen

De algemene schrijfwijze van een *tweedegraads* vergelijking is:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1-17)$$

We kunnen deze altijd herleiden tot een vergelijking van de vorm:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (p = b/a, q = c/a) \quad (1-18)$$

De oplossingen zijn (p, q -formule):

Oplossingen van een tweedegraads vergelijking van de vorm $x^2 + px + q = 0$ (zogenaamde p, q -formule)

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (1-19)$$

Afhankelijk van de waarde van de *discriminant* $D = (p/2)^2 - q$ zijn er drie mogelijkheden:

$D > 0$: twee verschillende reële oplossingen

$D = 0$: een (dubbele) reële oplossing

$D < 0$: geen reële oplossingen³⁾

³⁾ De oplossingen zijn (geconjugiseerd) complexe getallen. Deze worden verderop in hoofdstuk 7 uitvoerig behandeld.

■ Voorbeelden

$$(1) -2x^2 - 4x + 6 = 0 \mid : (-2)$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = 1^2 + 3 = 4 > 0: \Rightarrow \text{twee verschillende reële oplossingen}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3 \Rightarrow \mathcal{S} = \{-3, 1\}$$

$$(2) 3x^2 + 9x + 6,75 = 0 \mid : 3$$

$$x^2 + 3x + 2,25 = 0$$

$$D = 1,5^2 - 2,25 = 2,25 - 2,25 = 0 \Rightarrow \text{één (dubbele) oplossing}$$

$$x_{1/2} = -1,5 \pm \sqrt{0} = -1,5 \pm 0 = -1,5 \Rightarrow \mathcal{S} = \{-1,5\}$$

$$(3) x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 13 = -9 < 0 \Rightarrow \text{geen reële oplossingen} \Rightarrow \mathcal{S} = \{\}$$

■

1.3.3 Vergelijkingen van de derde en hogere graad

1.3.3.1 Inleiding

Een *algebraïsche vergelijking van de n-de graad* kunnen we in de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (1-20)$$

schrijven. Deze vergelijking heeft *hoogstens* n reële oplossingen. Als n oneven is, bestaat er ten minste één reële oplossing. Voor vergelijkingen tot en met de vierde graad kunnen we formules afleiden waarmee we de oplossingen kunnen berekenen uit de coëfficiënten van de vergelijking. Als voorbeeld noemen we de formule van *Cardano* voor het oplossen van een vergelijking van de derde graad. Helaas zijn deze formules in de praktijk te bewerkelijk, zodat we in de regel andere methoden gebruiken (bijvoorbeeld grafische of numerieke benaderingsmethoden, zie hiervoor de in hoofdstuk 4 beschreven methode van Newton-Raphson).

Als er een oplossing x_1 bekend is, kan de vergelijking van de n -de graad gereduceerd worden tot een vergelijking van de graad $(n-1)$ door te delen door de factor $(x - x_1)$. We gaan uitvoerig op dit onderwerp in bij het behandelen van polynoomfuncties (zie hiervoor hoofdstuk 3.5).

Tot slot laten we aan de hand van voorbeelden zien hoe we in *bijzondere gevallen* een vergelijking oplossen.

1.3.3.2 Derdegraads vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx = 0$

Derdegraads vergelijkingen van de vorm

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1-21)$$

(de constante ontbreekt) kunnen we altijd ontbinden in een *lineaire* en een *tweedegraads* vergelijking door x buiten haakjes te halen:

$$x(ax^2 + bx + c) = 0 \begin{cases} x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases} \quad (1-22)$$

Eén oplossing is dus altijd $x_1 = 0$, de tweedegraads vergelijking *kan* twee andere oplossingen hebben.

■ Voorbeeld

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = -2 \pm 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -3 \Rightarrow \mathcal{S} = \{-3, -1, 0\}$$

■

1.3.3.3 Bi-kwadratische vergelijkingen

Een algebraïsche vergelijking van de vierde graad van de bijzondere vorm

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1-23)$$

(er komen alleen *even* machten voor) noemen we bi-kwadratisch en kan door *substitutie* van $z = x^2$ omgezet worden in een tweedegraads vergelijking:

$$au^2 + bu + c = 0 \quad (1-24)$$

Een bi-kwadratische vergelijking heeft zodoende ofwel *geen* reële oplossing ofwel *twee* of *vier* reële oplossingen. Welke van deze drie mogelijkheden het geval is, hangt af van het *teken* van de oplossingen u_1 en u_2 van de tweedegraads ‘hulpvergelijking’ (voor zover die oplossingen tenminste bestaan).

■ Voorbeeld

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$\text{substitutie: } z = x^2$$

$$z^2 - 10z + 9 = 0 \Rightarrow z_{1/2} = 5 \pm 4$$

$$z_1 = 9, \quad z_2 = 1$$

het terug substitueren van $x^2 = z$ geeft

$$x^2 = z_1 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$x^2 = z_2 = 1 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 1$$

$$\text{oplossingsverzameling: } \mathcal{S} = \{-3, -1, 1, 3\} \text{ of } \mathcal{S} = \{\pm 1, \pm 3\}$$

■

1.3.4 Wortelvergelijkingen

De vergelijkingen die we tot nu toe behandeld hebben konden door *equivalentie-transformaties*⁴⁾ stapsgewijs vereenvoudigd en daarna opgelost worden. Hierbij werden geen oplossingen toegevoegd of weggelaten. Bij *wortelvergelijkingen*, waarbij de onbekende als veelterm (polynoom) onder het wortelteken voorkomt, is dit in het algemeen *niet* mogelijk.

Het volgende voorbeeld laat dit zien:

■ Voorbeeld

$$\sqrt{6x - 2} + 5 - 3x = 0$$

Eerst wordt de wortel apart gezet:

$$\sqrt{6x - 2} = 3x - 5$$

Hier staan we eerst even stil bij de mogelijke oplossingen. De oplossingen moeten namelijk aan *twee* voorwaarden voldoen:

Eerste voorwaarde: De term waarvan de wortel wordt genomen mag niet negatief worden; met andere woorden:

$$6x - 2 \geq 0 \Rightarrow 6x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1/3$$

Tweede voorwaarde: Een vierkantswortel is altijd groter dan of gelijk aan nul. Dit moet zodoende ook voor het *rechter* lid van de wortelvergelijking gelden:

$$3x - 5 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 5 \Rightarrow x \geq 5/3$$

Aan *beide* voorwaarden wordt uitsluitend voldaan door oplossingen $x \geq 5/3$. Wanneer er dus in het verdere verloop van de oplossingsprocedure waarden voorkomen die *niet* aan deze voorwaarde voldoen, dan gaat het om zogenaamde *schijnoplossingen* (zoals kan worden bevestigd door invullen in de oorspronkelijke vergelijking).

Na deze voorbeschouwing gaan we verder met de oplossing van de wortelvergelijking; als eerste werken we door *kwadrateren* de wortel weg:

$$\sqrt{6x - 2} = 3x - 5 \mid \text{kwadrateren} \Rightarrow 6x - 2 = (3x - 5)^2$$

Op deze manier krijgen we echter geen *equivalentie-transformatie* en kunnen we met *schijnoplossingen* te maken krijgen, dat wil zeggen dat de nieuwe (tweedegraads) vergelijking meer oplossingen *kan* hebben dan de oorspronkelijke wortelvergelijking (maar dat *hoeft* niet het geval te zijn)!

We lossen de tweedegraads vergelijking nu op (na omwisselen van beide leden):

$$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25 = 6x - 2 \Rightarrow$$

$$9x^2 - 36x + 27 = 0 \mid :9 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = 1$$

⁴⁾ De oplossingsverzameling van een vergelijking of een ongelijkheid blijft door equivalentie-transformaties onveranderd (symbool: $\Rightarrow$). Transformaties waardoor de oplossingsverzameling verandert, zijn geen equivalentie-transformaties.

De eerste waarde *voldoet* aan de voorwaarde $x \geq 5/3$, de tweede daarentegen *niet* ('schijnoplossing'). Dit wordt bevestigd door invullen in de *oorspronkelijke* vergelijking:

$$x_1 = 3 \quad \sqrt{6 \cdot 3 - 2} + 5 - 3 \cdot 3 = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0$$

De enige oplossing van de wortelvergelijking is zodoende $x_1 = 3$.

Opmerking

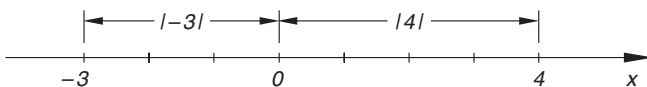
Zonder voorbeschouwing *moet* door controleren (invullen van *alle* gevonden waarden in de *oorspronkelijke* vergelijking) worden vastgesteld of het bij de oplossingen van de hulpvergelijking ook om oplossingen van de wortelvergelijking gaat of om 'schijnoplossingen'. In ons voorbeeld is x_1 een *oplossing* van de wortelvergelijking, maar is de waarde $x_2 = 1$ daarentegen een 'schijnoplossing'. ■

1.3.5 Modulusvergelijkingen

In deze paragraaf laten we aan de hand van voorbeelden zien hoe zogenaamde *modulusvergelijkingen* in eenvoudige gevallen door het onderscheiden van verschillende mogelijkheden of met behulp van een halfgrafische methode kunnen worden opgelost. Een *modulusvergelijking* bevat *ten minste één* term met de onbekende x tussen absolute-waarde-strepen. Eerst moeten we ons echter vertrouwd maken met de eigenschappen van de zogenaamde *modulusfunctie*.

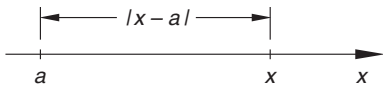
1.3.5.1 Definitie van de modulusfunctie

Onder de modulus (of absolute waarde) $|x|$ van een reëel getal x verstaan we de afstand van dat getal x tot het getal 0 (figuur 1-16):



Figuur 1-16

De afstand tussen twee getallen x en a op de getallenlijn is dan $|x - a|$ (figuur 1-17):

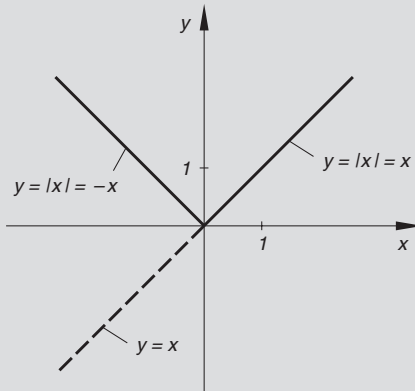


Figuur 1-17

De modulus $|x|$ van een reëel getal x kunnen we zien als een functie van x . Zo komen we op het begrip *modulusfunctie*:

Definitie: Met de *modulusfunctie* $y = |x|$ bedoelen we de voor alle $x \in \mathbb{R}$ gedefiniëerde functie (zie figuur 1-18):

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{voor } x \geq 0 \\ -x & \text{voor } x < 0 \end{cases} \quad (1-25)$$



Figuur 1-18
Grafiek van
de modulusfunctie $y = |x|$

De grafiek van de modulusfunctie $y = |x|$ krijgen we uit de lijn $y = x$. We moeten dan wel het stuk van de lijn dat *onder* de x -as ligt ‘omklappen’, dat wil zeggen in de x -as *spiegelen* (zie figuur 1-18).

Dit geldt voor elke willekeurige functie die tussen modulusstrepen staat:

Het tekenen van de grafiek van de functie $y = |f(x)|$

De grafiek van de functie $y = |f(x)|$, krijgen we uit de grafiek van de functie $y = f(x)$ door alle *onder* de x -as gelegen stukken van de grafiek te *spiegelen* in de x -as, en alle *boven* de x -as gelegen delen ongewijzigd te laten.

Opmerking

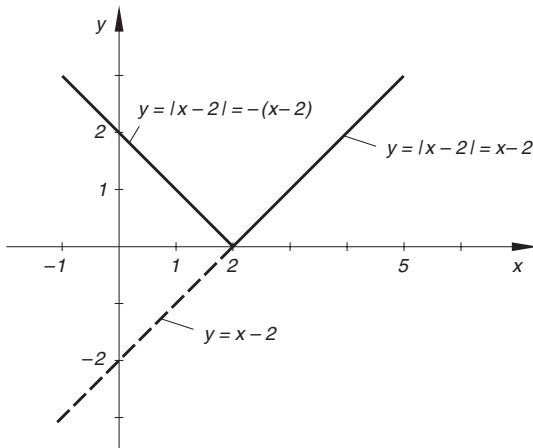
Spiegelen ten opzichte van de x -as betekent voor een punt op de kromme dat het *teken* van de ordinaat verandert. Uit de functie $y = f(x)$ verkrijgen we zodoende de functie $y = g(x) = -f(x)$.

Regel: Spiegelen ten opzichte van de x -as $\Rightarrow$ vermenigvuldiging van de functievergelijking met -1 .

■ Voorbeelden

(1) Hoe verloopt de functie $y = |x - 2|$?

Oplossing: We tekenen eerst de ‘hulplijn’ $y = x - 2$ en *spiegelen* het *onder* de x -as gelegen deel van de rechte lijn ten opzichte van deze as. Figuur 1-19 maakt een en ander duidelijk en toont de grafiek van de modulusfunctie $y = |x - 2|$.

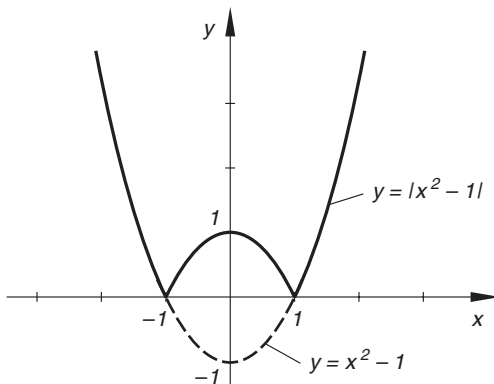
**Figuur 1-19**

Grafiek van de functie
 $y = |x - 2|$

De functievergelijking $y = |x - 2|$ kan als volgt door eenvoudige (gewone) vergelijkingen worden beschreven:

$$y = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{voor } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{voor } x < 2 \end{cases}$$

(2) We onderzoeken de kromme van $y = |x^2 - 1|$. Eerst tekenen we de ‘hulpfunctie’ $y = x^2 - 1$ (een parabool), en *spiegelen* vervolgens het deel van de kromme dat *onder* de x -as ligt (het deel van de parabool tussen $x = -1$ en $x = 1$) ten opzichte van deze as. Op deze manier verkrijgen we de grafiek van de modulusfunctie $y = |x^2 - 1|$ (figuur 1-20).

**Figuur 1-20**

Grafiek van de functie
 $y = |x^2 - 1|$

Deze functie kan ook als volgt in bereiken door gewone vergelijkingen worden beschreven:

$$y = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{voor } |x| \geq 1 \\ -(x^2 - 1) & \text{voor } |x| \leq 1 \end{cases}$$

1.3.5.2 Analytische oplossing van een modulusvergelijking door verschillende mogelijkheden te onderscheiden (voorbeeld)

De modulusvergelijking

$$|x + 2| - 2|x - 3| = 4$$

kan door het *onderscheiden van verschillende mogelijkheden* worden herleid tot twee eenvoudigere en gemakkelijk oplosbare lineaire vergelijkingen. Daarbij hangt alles af van het *teken* van de twee termen $T_1(x) = x + 2$ en $T_2(x) = x - 3$, die in de vergelijking tussen absolute-waarde-strepen staan. Deze termen kunnen als volgt *per bereik* door eenvoudiger uitdrukkingen worden vervangen:

$$|x + 2| = \begin{cases} (x + 2) & \text{voor } x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -(x + 2) & x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} (x - 3) & \text{voor } x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ -(x - 3) & x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases}$$

Daarbij moeten we in totaal *drie* gevallen onderscheiden:

$$x < -2; \quad -2 \leq x \leq 3; \quad x > 3$$

Alles hangt ervan af welk *teken* de termen $T_1(x) = x + 2$ en $T_2(x) = x - 3$ in deze intervallen hebben.

Wanneer een term *positief* is, dan mogen we de absolute-waarde-strepen *weglaten* (we schrijven de term dan tussen haakjes), en anders moeten we de term met -1 vermenigvuldigen (we zetten de term weer tussen haakjes en schrijven voor de haakjes een *minteken*).

Eerste geval: oplossingen in het interval $x < -2$

In dit interval zijn beide termen *negatief*:

$$x + 2 < 0 \quad \text{en} \quad x - 3 < 0$$

Er geldt zodoende:

$$\underbrace{|x + 2|}_{< 0} - 2 \underbrace{|x - 3|}_{< 0} = 4 \Rightarrow -(x + 2) + 2(x - 3) = 4 \Rightarrow$$

$$-x - 2 + 2x - 6 = 4 \Rightarrow x - 8 = 4 \Rightarrow x_1 = 12$$

Deze waarde is een ‘schijnoplossing’ omdat deze niet in het interval $x < -2$ ligt: $x_1 = 12 > -2$. Uitproberen bevestigt dit (we vullen de waarde $x_1 = 12$ in de oorspronkelijke vergelijking in):

$$|12 + 2| - 2|12 - 3| = |14| - 2|9| = 14 - 2 \cdot 9 = 14 - 18 = -4 \neq 4$$

Tweede geval: oplossingen in het interval $-2 \leq x \leq 3$

De term $x + 2$ is *positief* (of nul), de term $x - 3$ is daarentegen *negatief* (of nul). Er geldt zodoende:

$$\begin{aligned} \underbrace{|x+2|}_{\geq 0} - 2 \underbrace{|x-3|}_{\leq 0} &= 4 \Rightarrow (x+2) + 2(x-3) = 4 \Rightarrow \\ x+2+2x-6 &= 4 \Rightarrow 3x-4=4 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x_2=8/3 \end{aligned}$$

Deze waarde ligt in het interval $-2 \leq x \leq 3$ en is dus een *oplossing* van de modulusvergelijking. We kunnen dit met een controleberekening bevestigen:

$$\left| \frac{8}{3} + 2 \right| - 2 \left| \frac{8}{3} - 3 \right| = \left| \frac{14}{3} \right| - 2 \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{14}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3} - \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Derde geval: oplossingen in het interval $x > 3$

Beide termen zijn in dit interval *positief*. Zodoende geldt:

$$\begin{aligned} \underbrace{|x+2|}_{> 0} - 2 \underbrace{|x-3|}_{> 0} &= 4 \Rightarrow (x+2) - 2(x-3) = 4 \Rightarrow \\ x+2-2x+6 &= 4 \Rightarrow -x+8=4 \Rightarrow -x=-4 \Rightarrow x_3=4 \end{aligned}$$

Omdat $x_3 = 4 > 3$ hebben we een andere *oplossing* van de modulusvergelijking gevonden. We bevestigen dit met een controleberekening:

$$|4+2| - 2|4-3| = |6| - 2|1| = 6 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$$

Oplossingen: $S = \{8/3, 4\}$

1.3.5.3 Oplossing van een modulusvergelijking met behulp van grafieken

De modulusvergelijking

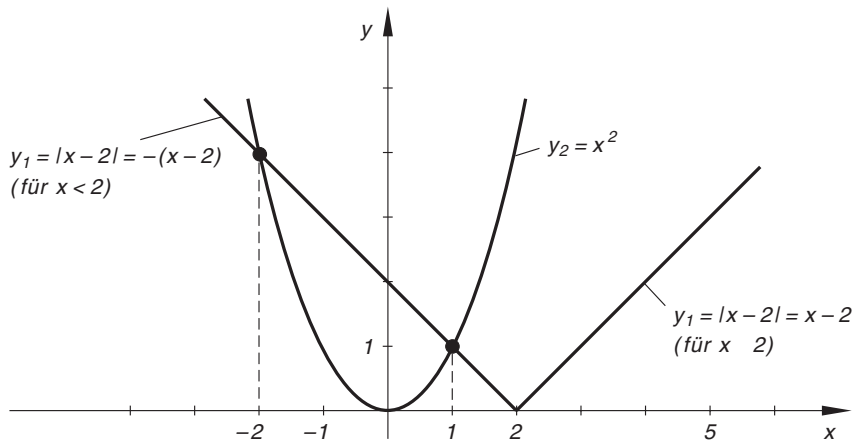
$$|x-2| = x^2$$

kunnen we als volgt met behulp van grafieken oplossen:

we beschouwen de twee kanten van de vergelijking als functies en schrijven:

$$y_1 = |x-2| \quad \text{en} \quad y_2 = x^2$$

De oplossingen van de modulusvergelijking zijn de x -waarden van de snijpunten van de twee grafieken (figuur 1-21). Uit de figuur kunnen we aflezen dat er precies *twee* snijpunten en zodoende *twee* oplossingen zijn.



Figuur 1-21 Grafische oplossing van de modulusvergelijking $|x - 2| = x^2$

Als we netjes getekend hebben, kunnen deze waarden direct uit de grafiek afgelezen worden. Door berekening krijgen we de gezochte x -waarden (volgens figuur 1-21) door de lijn $y = -(x - 2) = -x + 2$ te snijden met de parabool $y = x^2$, omdat de modulusfunctie $y = |x - 2|$ in het interval $x \leq 2$, waarin de beide oplossingen liggen, met de rechte lijn $y = -(x - 2) = -x + 2$ samenvalt.

$$\begin{aligned} x^2 &= -x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \\ x_{1/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \\ x_1 &= 1, \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

Oplossingsverzameling: $S = \{-2, 1\}$

1.4 Ongelijkheden

In deze paragraaf houden we ons bezig met *ongelijkheden* waarin een onbekende x -waarde voorkomt. De oplossingsverzamelingen zijn meestal *intervallen*. Net als bij vergelijkingen proberen we de gegeven ongelijkheid door *equivalentie-transformaties* op te lossen. Daarbij moeten we op de volgende regels letten:

Equivalentie-transformaties van een ongelijkheid

De *oplossingsverzameling* van een ongelijkheid blijft bij toepassing van de volgende bewerkingen onveranderd *behouden* (zogenaamde *equivalentie-transformaties* van een ongelijkheid):

- 1 *Optellen* (resp. *afrekken*) van een willekeurige term $T(x)$ aan beide kanten van het ongelijktteken.
- 2 *Vermenigvuldigen* (resp. *delen*) van beide kanten door een willekeurig positief getal.

3 *Vermenigvuldigen* (resp. *delen*) van beide kanten door een *willekeurig negatief* getal, wanneer daarbij tegelijk het ongelijkteken als volgt wordt *veranderd*:

$<$ wordt $>$

$\leq$ wordt $\geq$

$>$ wordt $<$

$\geq$ wordt $\leq$

Opmerking

De bewerkingen (2) en (3) gelden *mutatis mutandis* ook voor vermenigvuldiging met en deling door een *term* $T(x) \neq 0$, waarbij steeds door het onderscheiden van mogelijkheden moet worden gecontroleerd welk *teken* de term krijgt (zie hiertoe het volgende eerste voorbeeld).

■ Voorbeelden

$$(1) \frac{2x-1}{x+2} > 3 \quad (x \neq -2)$$

We lossen deze ongelijkheid als volgt op. Eerst werken we de breuk weg door beide kanten met de term $x+2$ te *vermenigvuldigen* en daarbij in de gaten te houden welk *teken* deze term heeft. We moeten zodoende de gevallen $x+2 > 0$ en $x+2 < 0$ onderscheiden (het geval $x+2 = 0$ en dus $x = -2$ vervalt omdat delen door 0 verboden is).

Eerste geval: $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

Het ongelijkheidsteken blijft *behouden*:

$$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \mid \cdot (x+2) \Rightarrow 2x-1 > 3(x+2) \Rightarrow$$

$$2x-1 > 3x+6 \Rightarrow -x > 7 \mid \cdot (-1) \Rightarrow x < -7$$

(we hebben met een *negatief* getal vermenigvuldigd, daarom moet $>$ door $<$ worden vervangen).

De ‘oplossing’ is in *tegenspraak* met de aanname $x > -2$. Het gaat hier dus om een ‘schijnoplossing’.

Tweede geval: $x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$

We vermenigvuldigen de ongelijkheid in dit geval dus met een *negatieve* term, en daarom moet het ongelijkheidsteken worden veranderd ($>$ wordt $<$):

$$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \mid \cdot (x+2) \Rightarrow 2x-1 < 3(x+2) \Rightarrow$$

$$2x-1 < 3x+6 \Rightarrow -x < 7 \mid \cdot (-1) \Rightarrow x > -7$$

(Vermenigvuldiging met het *negatieve* getal -1 , $<$ wordt dus $>$).

Aan de voorwaarde $x < -2$ wordt echter alleen voldaan door x -waarden die tussen -7 en -2 liggen.

Oplossing: $-7 < x < -2$

(2) $(x - 1)^2 \leq |x|$

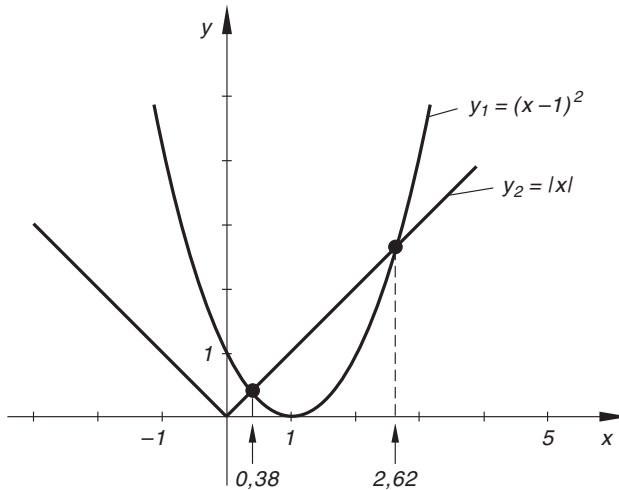
We lossen deze ongelijkheid als volgt op met behulp van een figuur:

de linker- en de rechterkant van de ongelijkheid beschouwen we als functies van x :

$$y_1 = (x - 1)^2 \quad (\text{parabool})$$

$$y_2 = |x| \quad (\text{modulusfunctie})$$

De ongelijkheid kan dan ook in de vorm $y_1 \leq y_2$ worden geschreven. Oplossingen zijn zodoende alle x -waarden waarvoor de parabool *onder* de modulusfunctie blijft, waarbij de snijpunten ook tot de oplossingsverzameling behoren. We tekenen de twee krommen en zien dan in figuur 1-22 dat precies *tussen* de twee snijpunten aan deze voorwaarde is voldaan.



Figuur 1-22 Grafische oplossing van de ongelijkheid $(x - 1)^2 \leq |x|$

Deze snijpunten vinden we door de functies $y_1 = (x - 1)^2$ en $y_2 = |x| = x$ (voor $x \geq 0$)⁵⁾ aan elkaar gelijk te stellen:

$$(x - 1)^2 = x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$$

⁵⁾ Aan de hand van de schets kunnen we zien dat de gezochte snijpunten van de krommen in het bereik van *positieve* x -waarden liggen. De modulusfunctie $y_2 = |x|$ is daar echter *identiek* aan de rechte $y = x$, die de parabool $y_1 = (x - 1)^2$ dus in *dezelfde* punten snijdt als de modulusfunctie.

$$x_{1/2} = 1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 1} = 1,5 \pm \sqrt{1,25} = 1,5 \pm 1,12 \Rightarrow$$

$$x_1 = 2,62, \quad x_2 = 0,38$$

Oplossingsverzameling: $0,38 \leq x \leq 2,62$ ■

1.5 Stelsels lineaire vergelijkingen

In deze paragraaf behandelen we de *eliminatiemethode van Gauss*, een methode voor het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen. Stelsels lineaire vergelijkingen komen we in de toegepaste wiskunde bijvoorbeeld tegen bij de volgende problemen:

1. berekening van de in een *constructie* optredende *statische krachten* (bijvoorbeeld hijskranen, bruggen);
2. bepalen van de *stromen* in een *elektrisch netwerk* (zie het voorbeeld aan het einde van deze paragraaf);
3. berekening van de *eigenfrequentie van een oscillerend systeem*.

1.5.1 Een voorbeeld als inleiding

Gegeven is een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden x , y en z :

$$(I) \quad -x + y + z = 0$$

$$(II) \quad x - 3y - 2z = 5 \quad (1-26)$$

$$(III) \quad 5x + y + 4z = 3$$

De door *Gauss* bedachte methode om zo'n stelsel op te lossen, elimineert stapsgewijs de ene na de andere onbekende, tot er één vergelijking met één onbekende overblijft.

In ons voorbeeld elimineren we eerst de onbekende x :

We tellen de 1e en de 2e vergelijking bij elkaar op en we tellen de 3e vergelijking en 5 keer de 1e vergelijking bij elkaar op.

Na het optellen is telkens de onbekende x verdwenen:

$$\begin{array}{rcl} (II) & x - 3y - 2z = 5 & \\ (I) & -x + y + z = 0 & \\ \hline (I^*) & 2y - z = 5 & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} + \quad \begin{array}{rcl} (III) & 5x + y + 4z = 3 & \\ (5 \cdot I) & -5x + 5y + 5z = 0 & \\ \hline (II^*) & 6y + 9z = 3 & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} +$$

Zo hebben we het stelsel teruggebracht tot een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$(I^*) \quad -2y - z = 5$$

$$(II^*) \quad 6y + 9z = 3$$

We herhalen nu deze methode. Om de onbekende y te elimineren, tellen we vergelijking (II*) en 3 keer vergelijking (I*) bij elkaar:

$$\begin{array}{rcl} \text{(II*)} & 6y + 9z = 3 & \\ (3 \cdot \text{I*}) & -6y - 3z = 15 & \\ \hline \text{(I**) } & 6z = 18 & \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \text{(II*)} & 6y + 9z = 3 & \\ (3 \cdot \text{I*}) & -6y - 3z = 15 & \end{array}} \right\} +$$

(Alternatief: eerst vergelijking (II*) door 3 delen en vervolgens bij vergelijking (I*) optellen.)

De twee geëlimineerde vergelijkingen (I) en (I*) vormen samen met de overgebleven vergelijking (I**) een *recursief (driehoekig) stelsel*, waarmee we de waarden van de drie onbekenden x , y en z stapsgewijs kunnen berekenen:

Recursiefstelsel

$$\begin{array}{rcl} \text{(I)} & -x + y + z = 0 & \\ \text{(I*)} & -2y - z = 5 & \\ \text{(I**) } & 6z = 18 & \end{array} \quad (1-27)$$

Uit de laatste vergelijking volgt: $z = 3$. Als we deze waarde in de middelste vergelijking invullen, vinden we voor y de waarde -4 . Uit de eerste vergelijking volgt dan $x = -1$.

Het gegeven stelsel lineaire vergelijkingen heeft dus precies één oplossing: $x = -1$, $y = -4$, $z = 3$.

We willen deze methode wat korter maken en gebruiken daarom het volgende schema, waarin de vergelijkingen alleen door de coëfficiënten en de constante term (c_i) worden weergegeven:

	x	y	z	c_i	
(I)	-1	1	1	0	
(II)	1	-3	-2	5	$\left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \text{Altijd lege rijen reserveren voor latere berekeningen!}$
(III)	5	1	4	3	

We elimineren nu de onbekende x door de eerste rij bij de tweede op te tellen en door bij de 3e rij 5 keer de 1e rij op te tellen. We houden twee nieuwe vergelijkingen over, waarin alleen de onbekenden y en z voorkomen:

	x	y	z	c_i
(I)	-1	1	1	0
(II)	1	-3	-2	5
(1 · I)	-1	1	1	0
(III)	5	1	4	3
(5 · I)	-5	5	5	0
(I*)		-2	-1	5
(II*)		6	9	3

$\left. \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \text{Lege rijen reserveren!}$

We tellen nu 3 keer de 1e rij (I*) bij de 2e rij (II*) op en krijgen een vergelijking (I**) waarin alleen de onbekende z voorkomt. Het schema is nu compleet en ziet er als volgt uit:

	x	y	z	c_i	s_i
(I)	-1	1	1	0	1
(II)	1	-3	-2	5	1
(1 · I)	-1	1	1	0	1
(III)	5	1	4	3	13
(5 · I)	-5	5	5	0	5
(I*)		-2	-1	5	2
(II*)		6	9	3	18
(3 · I*)		-6	-3	15	6
(I**)			6	18	24

We bespreken nu nog een manier om te controleren of er geen rekenfouten zijn gemaakt.

In de laatste kolom van het schema (waar s_i boven staat) staat telkens de som van alle getallen in een rij (coëfficiënten en constante). We kunnen nu onze berekeningen met deze rijssommen als volgt controleren. We nemen als voorbeeld de 3e rij (III). De rijssom is 13. Als we bij de 3e rij 5 keer de 1e rij optellen, krijgen we de nieuwe rij (II*) = (III) + (5 · I). De rijssom van deze nieuwe rij kunnen we op twee manieren berekenen:

1. we kunnen de getallen van de nieuwe rij optellen (uitkomst: 18),
2. we kunnen 5 keer de rijssom van de 1e rij optellen bij de rijssom van de 3e rij (uitkomst: $13 + 5 \cdot 1 = 18$).

Deze twee manieren leveren hetzelfde resultaat (rijssom = 18).

Het is nu eenvoudig om de oplossing te berekenen uit het *recursieve stelsel* dat we krijgen door de *geëlimineerde* rijen (I) en (I*) en de laatste rij (I**) bij elkaar te zetten.

1.5.2 De eliminatiemethode van Gauss

Stelsels lineaire vergelijkingen bestaan uit m vergelijkingen met n onbekenden $x_1, x_2, \dots, x_n$. Elke vergelijking is *lineair* in $x_1, x_2, \dots, x_n$, dat wil zeggen deze onbekenden komen alleen in de eerste macht voor.

Definitie: Het systeem van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m$$

(1-28)

noemen we een *stelsel lineaire vergelijkingen*. De reële getallen a_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$) noemen we de coëfficiënten van het stelsel, de getallen c_i de constanten.

Een stelsel lineaire vergelijkingen noemen we *homogeen* als alle constanten $c_1, c_2, \dots, c_m$ gelijk aan 0 zijn. Anders noemen we het stelsel *niet-homogeen*.

We beperken ons in de rest van deze paragraaf tot het meest voorkomende geval: een *vierkant stelsel*; dat is een stelsel waarbij het aantal onbekenden gelijk is aan het aantal vergelijkingen ($m = n$):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n$$

(1-29)

Matrixnotatie van een stelsel lineaire vergelijkingen

We schrijven de coëfficiënten a_{ik} van het stelsel op in een *coëfficiëntenmatrix* $\mathbf{A}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1-30)$$

Deze matrix heeft n rijen en n kolommen (een $n \times n$ matrix). We schrijven de n onbekenden $x_1, x_2, \dots, x_n$ in een *kolomvector* $\vec{x}$ op; ook de constanten $c_1, c_2, \dots, c_n$ schrijven we in een *kolomvector* $\vec{c}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (1-31)$$

De kolomvector $\vec{x}$ noemen we in dit verband ook wel *oplossingsvector*. Een *kolomvector* zoals $\vec{x}$ of $\vec{c}$ kan ook als speciale matrix met n rijen en *één* kolom worden beschouwd, en wordt daarom ook wel een *kolommatrix* genoemd.

We kunnen nu het vierkante stelsel lineaire vergelijkingen in een kortere vorm noteren:

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{c} \quad (1-32)$$

Uitgeschreven ziet deze *matrixvergelijking* er als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (1-33)$$

De linker zijde van deze vergelijking is een zogenaamd *matrixproduct* dat wordt gevormd door de coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A}$ en de kolommatrix $\vec{x}$. We verkrijgen de *eerste* vergelijking van het stelsel lineaire vergelijkingen (1-29) door de elementen van de *eerste rij* van $\mathbf{A}$ achtereenvolgens met de corresponderende elementen van de kolommatrix $\vec{x}$ te *vermenigvuldigen*, vervolgens alle producten *op te tellen* en de som ten slotte gelijk te stellen aan het *eerste element* van de kolommatrix $\vec{c}$ (aan de rechter zijde van het $=$ -teken) *gelijk te stellen* (in vergelijking 1-33 hebben we dit rekenvoorschrift door een grijze arcering verduidelijkt):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \quad (1-34)$$

Op vergelijkbare wijze verkrijgen we andere vergelijkingen van het stelsel lineaire vergelijkingen.

In deel 2 gaan we nog uitvoerig in op de *matrixvermenigvuldiging* (hoofdstuk 1, lineaire algebra). De notatie $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{c}$ voor een stelsel lineaire vergelijkingen moet hier slechts als een *formele verkorte notatie* worden opgevat.

Equivalentie-transformaties bij een stelsel lineaire vergelijkingen

Om een gegeven stelsel lineaire vergelijkingen van het type (1-29) of (1-32) op te kunnen lossen, moet het eerst met behulp van *equivalentie-transformaties* worden omgezet in een zogenaamd *recursief stelsel* van de vorm

$$\begin{aligned} a_{11}^* x_1 + a_{12}^* x_2 + \dots + a_{1n}^* x_n &= c_1^* \\ a_{21}^* x_1 + a_{22}^* x_2 + \dots + a_{2n}^* x_n &= c_2^* \\ &\vdots \\ a_{n1}^* x_1 + a_{n2}^* x_2 + \dots + a_{nn}^* x_n &= c_n^* \end{aligned} \quad (1-35)$$

Uit dit stelsel kunnen we de n onbekenden als volgt berekenen: eerst x_n uit de laatste vergelijking, daarna x_{n-1} uit de voorlaatste vergelijking, etc.

We mogen de volgende operaties gebruiken als *equivalentie-transformaties*:

Equivalentie-transformaties voor een stelsel lineaire vergelijkingen

De *oplossingsverzameling* van een stelsel lineaire vergelijkingen $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{c}$ blijft bij toepassing van de volgende bewerkingen *ongewijzigd intact* (zogenaamde *equivalentie-transformaties* van een stelsel lineaire vergelijkingen):

1. Twee vergelijkingen mogen van plaats *verwisselen*.
2. We mogen iedere vergelijking met een willekeurig van nul verschillend getal vermenigvuldigen.
3. We mogen bij iedere vergelijking een willekeurig veelvoud van een *andere* vergelijking optellen.

De eliminatiemethode van Gauss

We geven nu een korte beschrijving van de door *Gauss* bedachte methode om een gegeven stelsel lineaire vergelijkingen om te zetten in een *recursief* stelsel.

We gebruiken de in paragraaf 1.5.1 beschreven verkorte notatie: we geven van iedere vergelijking van het stelsel alleen de coëfficiënten en de constanten en schrijven deze in een rij. Daarachter komt de rij som (voor de controle achteraf op rekenfouten).

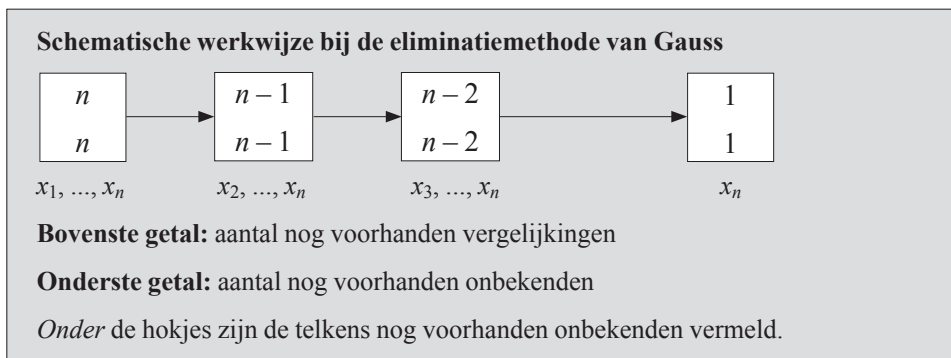
De hierboven genoemde equivalentie-transformaties voor een stelsel lineaire vergelijkingen mogen we ook gebruiken voor deze *rijen* van coëfficiënten en constanten.

De *eliminatiemethode van Gauss* verloopt stap voor stap als volgt, waarbij we er in eerste instantie van uitgaan dat de onbekenden in de volgorde $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ worden geëlimineerd:

- (1) Eerst reduceren we door eliminatie van de onbekende x_1 het stelsel lineaire vergelijkingen tot een stelsel met $n - 1$ vergelijkingen en $n - 1$ onbekenden $x_2, x_3, \dots, x_n$. Om dit te bereiken, vermenigvuldigen we de eerste vergelijking (rij) met de factor $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ en tellen deze bij de tweede vergelijking op. Hierdoor verdwijnt de onbekende x_1 . We gaan analoog te werk bij de andere vergelijkingen. In het algemeen tellen we

- bij de i -de vergelijking $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ -keer de 1e vergelijking op ($i = 2, 3, \dots, n$). Hierdoor verdwijnt telkens de onbekende x_1 én de eerste vergelijking (rij).
- (2) We passen de methode beschreven onder (1) toe op het *gereduceerde stelsel*, dat bestaat uit $n - 1$ vergelijkingen met $n - 1$ onbekenden $x_2, x_3, \dots, x_n$. Hierdoor verdwijnt de volgende onbekende x_2 . Nadat we dit in totaal $n - 1$ keer gedaan hebben, houden we één vergelijking (rij) met één onbekende over.
 - (3) De *geëlimineerde* vergelijkingen (rijen) vormen samen met de laatste vergelijking een recursief stelsel. Uit dit stelsel kunnen we de onbekenden in de volgorde $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ berekenen.

De hier beschreven methode wordt de *eliminatiemethode van Gauss* genoemd en kan schematisch als volgt worden weergegeven:



Opmerkingen

- (1) Het maakt niet uit in welke volgorde de onbekenden geëlimineerd worden.
- (2) De eliminatiemethode van Gauss kan ook worden toegepast op het algemene geval van een stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden. In het geval van $m = n$ hebben we met een *kwadratisch* stelsel te maken, dat ook wel een (n, n) -stelsel wordt genoemd.
- (3) In voorkomende gevallen moeten de onbekenden nog worden gerangschikt, dat wil zeggen worden omgenummerd.

Aantal oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen

Een *niet-homogeen* stelsel heeft ofwel precies één oplossing ofwel oneindig veel oplossingen ofwel géén oplossing. Als er *oneindig* veel oplossingen zijn (we zeggen ook wel: het stelsel is niet éénduidig oplosbaar), dan kunnen we voor minstens een van de onbekenden $x_1, x_2, \dots, x_n$ een willekeurig getal invullen. Deze onbekende noemen we een *parameter*.

De oplossingen van het niet-homogene stelsel hangen van nog een of meer parameters af. We geven voorbeelden aan het einde van deze paragraaf.

In tegenstelling tot een niet-homogeen stelsel lineaire vergelijkingen is een *homogeen stelsel* altijd oplosbaar. Het is van de vorm

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{array} \quad \text{of} \quad \mathbf{A} \vec{x} = \vec{0} \quad (1-36)$$

en heeft dus in elk geval de *triviale* oplossing

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0, \quad \text{of} \quad \vec{x} = \vec{0} \quad (1-37)$$

zoals we door invullen van deze waarden in het stelsel (1-36) gemakkelijk kunnen narekenen⁶⁾.

Als er meer dan één oplossing is, zijn er altijd *oneindig* veel oplossingen. Met andere woorden: een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen heeft ofwel één oplossing, namelijk de triviale oplossing $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, ofwel oneindig veel oplossingen (minstens één parameter). Samenvatting:

Aantal oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen

1. Niet-homogeen stelsel lineaire vergelijkingen $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{c}$:

Het stelsel heeft ofwel precies één oplossing, ofwel oneindig veel oplossingen, ofwel geen oplossing.

2. Homogeen stelsel lineaire vergelijkingen $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$:

Het stelsel heeft ofwel precies één oplossing, namelijk de triviale oplossing $\vec{x} = \vec{0}$, ofwel oneindig veel oplossingen, die nog van ten minste één parameter afhangen.

Opmerkingen

- (1) Deze uitspraken gelden ook voor *niet-kwadratische* stelsels van lineaire vergelijkingen.
- (2) Stelsels lineaire vergelijkingen met 2, 3, ..., n oplossingen bestaan niet!

⁶⁾Een kolomvector die uitsluitend *nullen* bevat, wordt een *nulvector* genoemd en met het symbool $\vec{0}$ aangeduid.

■ Voorbeelden

(1) We lossen het niet-homogene stelsel lineaire vergelijkingen

$$x_1 - 3x_2 + 1,5x_3 - x_4 = -10,4$$

$$-2x_1 - x_2 + 3,5x_3 - 2x_4 = -16,5$$

$$x_1 - 2x_2 + 1,2x_3 - 2x_4 = 0$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -0,7$$

op met de elimatiemethode van Gauss. De rijen die we achtereenvolgens gebruiken om de onbekenden te elimineren, geven we aan door E_1 , E_2 en E_3 . De in het rekenschema *niet* benodigde lege regels worden hieronder steeds weggelaten.

	x_1	x_2	x_3	x_4	c_i	s_i
E_1	1	-3	1,5	-1	-10,4	-11,9
	-2	1	3,5	2	-16,5	-12
$2 \cdot E_1$	2	-6	3	-2	-20,8	-23,8
	1	-2	1,2	2	0	2,2
$-1 \cdot E_1$	-1	3	-1,5	1	10,4	11,9
	3	1	-1	-3	-0,7	-0,7
$-3 \cdot E_1$	-3	9	-4,5	3	31,2	35,7
		-5	6,5	0	-37,3	-35,8
$5 \cdot E_2$		5	-1,5	15	52	70,5
E_2		1	-0,3	3	10,4	14,1
		10	-5,5	0	30,5	35
$-10 \cdot E_2$		-10	3	-30	-104	-141
			5	15	14,7	34,7
$2 \cdot E_3$			-5	-60	-147	-212
E_3			-2,5	-30	-73,5	-106
				-45	-132,3	-177,3

Het *recursieve stelsel* ziet er dus als volgt uit (het bestaat uit de regels E_1 , E_2 , E_3 en de laatste regel):

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 - 3x_2 + 1,5x_3 - x_4 = -10,4 & \Rightarrow & x_1 = 0,808 & \uparrow \\
 x_2 - 0,3x_3 + 3x_4 = 10,4 & \Rightarrow & x_2 = -0,184 & \uparrow \\
 -2,5x_3 - 30x_4 = -73,5 & \Rightarrow & x_3 = -5,88 & \uparrow \\
 -45x_4 = -132,3 & \Rightarrow & x_4 = 2,94 &
 \end{array}$$

We lossen het stelsel van onder naar boven op (zoals met pijlen aangegeven): de enige oplossing is $x_1 = 0,808$, $x_2 = -0,184$, $x_3 = -5,88$, $x_4 = 2,94$.

(2) Het homogene stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

heeft, zoals we zullen zien, *oneindig* veel oplossingen. Met de methode van Gauss krijgen we eerst:

	x	y	z	c_i	s_i
$\boxed{E_1}$	1	1	-2	0	0
$-1 \cdot E_1$	1	-1	-2	0	-2
	-1	-1	2	0	0
$-2 \cdot E_1$	2	3	-4	0	1
	-2	-2	4	0	0
$2 \cdot E_2$		-2	0	0	-2
		2	0	0	2
$\boxed{E_2}$		1	0	0	1
			0	0	0

Deze rijen zijn
evenredig

De laatste rij komt overeen met de vergelijking

$$0 \cdot z = 0$$

Iedere $z \in \mathbb{R}$ voldoet aan deze vergelijking, dus is z een parameter waarvoor we elk getal kunnen invullen (we schrijven dan, zoals algemeen gebruikelijk, $z = \lambda$ met $\lambda \in \mathbb{R}$). Een product van twee factoren waarbij een van beide factoren *verdwijnt* (in dit geval de linker factor), heeft altijd de waarde nul, en wel *onafhankelijk* van de waarde van de tweede factor.

Het *recursieve* stelsel, bestaande uit de rijen $\boxed{E_1}$, $\boxed{E_2}$ en de laatste rij, ziet er dus als volgt uit:

$$\begin{array}{rcll} x + y - 2z = 0 & \Rightarrow & x = 2\lambda & \uparrow \\ y + 0 \cdot z = 0 & \Rightarrow & y = 0 & \uparrow \\ 0 \cdot z = 0 & \Rightarrow & z = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) & \end{array}$$

De achtereenvolgens van onder naar boven berekende oplossingsverzameling is $x = 2\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$ met $\lambda \in \mathbb{R}$. Dit homogene stelsel lineaire vergelijkingen heeft zodoende *oneindig* veel oplossingen die nog van een reële *parameter* λ afhangen. Zo krijgen we bijvoorbeeld voor $\lambda = 3$ de specifieke oplossing $x = 6$, $y = 0$, $z = 3$, maar voor de parameterwaarde $\lambda = -2,5$ daarentegen de specifieke oplossing $x = -5$, $y = 0$, $z = -2,5$.

Opmerking

We kunnen na de eerste berekeningen al zien dat dit stelsel *oneindig* veel oplossingen heeft: de twee rijen (vergelijkingen $(-2; 0; 0)$ en $(1; 0; 0)$ (telkens *zonder* de rijsom) zijn *evenredig* (factor: -2) en komen in werkelijkheid overeen met *dezelfde* vergelijking. We noemen dergelijke rijen respectievelijk vergelijkingen ook wel *lineair afhankelijk*.

- (3) We laten nu zien dat het niet-homogene stelsel lineaire vergelijkingen

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

$$2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -6$$

niet oplosbaar is.

Met de methode van Gauss krijgen we het volgende schema:

	x_1	x_2	x_3	c_i	s_i
E_1	-1	2	1	6	8
	1	1	1	-2	1
$1 \cdot E_1$	-1	2	1	6	8
	2	-4	-2	-6	-10
$2 \cdot E_1$	-2	4	2	12	16
		3	2	4	9
		0	0	6	6

Uit de beide overblijvende rijen (vergelijkingen) met de resterende onbekenden x_2 en x_3 moeten we nu een van beide onbekenden elimineren. Dit lukt echter niet, omdat de coëfficiënten van x_2 en x_3 in de *onderste* vergelijkingstekens *wegvallen*. Deze ‘merkwaardige’ laatste regel (grijs gearceerd) leidt tot een *tegenspraak*:

$$0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 6$$

Omdat producten met een factor 0 *wegvallen*, is de *linkerkant* van deze vergelijking voor *alle* reële waarden van x_2 en x_3 gelijk aan nul:

$$\underbrace{0 \cdot x_2}_{0} + \underbrace{0 \cdot x_3}_{0} = 6 \quad \Rightarrow \quad 0 = 6$$

Omdat het getal 0 nooit gelijk kan zijn aan het getal 6 (*tegenspraak*), is het gegeven stelsel *niet* oplosbaar.

- (4) Ten slotte bespreken we nog een voorbeeld van een stelsel van vier vergelijkingen en drie onbekenden (dit is dus geen vierkant stelsel):

$$-x + y - z = -2$$

$$3x - 2y + z = 2$$

$$2x - 5y + 3z = 1$$

$$x + 4y + 2z = 15$$

	x	y	z	c_i	s_i
E_1	-1	1	-1	-2	-3
$3 \cdot E_1$	3	-2	1	2	4
	-3	3	-3	-6	-9
$-2 \cdot E_1$	2	-5	3	1	1
	-2	2	-2	-4	-6
$1 \cdot E_1$	1	4	2	15	22
	-1	1	-1	-2	-3
E_2		1	-2	-4	-5
$3 \cdot E_2$		-3	1	-3	-5
		3	-6	-12	-15
		5	1	13	19
$-5 \cdot E_2$		-5	10	20	25
			-5	-15	-20
			11	33	44

$\leftarrow$ Deze twee rijen
 $\leftarrow$ zijn *evenredig*

De twee overgebleven rijen representeren twee vergelijkingen met de *ene* onbekende z . Ze leiden tot *een en dezelfde* oplossing voor z zodat het *evenredige vergelijkingen* (rijen) zijn die uiteindelijk slechts *een enkele* vergelijking voorstellen.⁷⁾

Het *recursieve* stelsel bestaat uit de vergelijkingen E_1 en E_2 die we gebruikt hebben om x en y te elimineren en een van de twee evenredige vergelijkingen:

Recursief stelsel

$$\begin{array}{rclcl}
 -x + y - z = -2 & \Rightarrow & x = 1 & & \\
 y - 2z = -4 & \Rightarrow & y = 2 & \uparrow & \\
 -5z = -15 & \Rightarrow & z = 3 & \uparrow &
 \end{array}$$

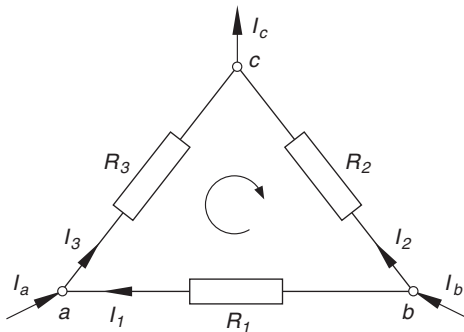
Het stelsel lineaire vergelijkingen heeft dus precies één oplossing:

$$x = 1, y = 2, z = 3. \quad \blacksquare$$

⁷⁾ Wanneer we *verschillende* waarden voor z zouden vinden, dan zou het stelsel vergelijkingen *niet* oplosbaar zijn (er bestaan geen stelsels met twee verschillende oplossingen).

1.5.3 Een voorbeeld van een toepassing: de berekening van een elektrisch netwerk

In figuur 1-23 zien we een *elektrisch netwerk* met drie *knooppunten* (a , b , c) en drie *stroomdraden* met ieder een ohmse weerstand.⁸⁾ I_a en I_b zijn inkomende stromen (dus in de richting van het netwerk), I_c is een uit knooppunt c uitgaande stroom. We berekenen de stromen I_1 , I_2 en I_3 en de uitgaande stroom I_c . We gaan uit van de in figuur 1-23 gegeven waarden voor de drie weerstanden en de stromen I_a en I_b .



$$R_1 = 1\Omega$$

$$R_2 = 5\Omega$$

$$R_3 = 3\Omega$$

$$I_a = 1\text{A}$$

$$I_b = 2\text{A}$$

Figuur 1-23

Oplossing

We maken gebruik van de *eerste wet van Kirchhoff* (voor knooppunten): *in een knooppunt is de som van de inkomende en uitgaande stromen gelijk aan nul* (inkomende stromen noemt men positief, uitgaande stromen negatief). Voor de knooppunten a , b , en c krijgen we dan:

$$(a) \quad I_a + I_1 - I_3 = 0$$

$$(b) \quad I_b + I_1 - I_2 = 0 \quad (1-38)$$

$$(c) \quad -I_c + I_2 + I_3 = 0$$

Uit de *tweede wet van Kirchhoff* (voor stroomkringen): *in iedere stroomkring⁹⁾ is de som van de spanningen gelijk aan nul*, leiden we de tweede vergelijking af. Als we rondgaan in de getekende richting is

$$(*) \quad R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \quad (1-39)$$

We kunnen de drie stromen I_1 , I_2 , I_3 berekenen door het volgende stelsel lineaire vergelijkingen op te lossen. Dit stelsel bestaat uit de vergelijkingen (a), (b) en (*):

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 &= -I_a \\ -I_1 - I_2 &= -I_b \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1-40)$$

⁸⁾ Knooppunt: punt waar de stroom zich vertakt.

Stroomdraad: verbinding tussen twee knooppunten.

⁹⁾ Een stroomkring is een gesloten, uit stroomdraden bestaande lus.

Als we de in figuur 1-23 gegeven waarden invullen, krijgen we:

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 &= -1\text{A} \\ -I_1 - I_2 &= -2\text{A} \\ I_1 - 5I_2 + 3I_3 &= 0\text{A} \end{aligned} \quad (1-41)$$

We lossen dit stelsel op met de *eliminatiemethode van Gauss*:

	I_1	I_2	I_3	c_i
E_1	1	0	-1	-1A
	-1	-1	0	-2A
$1 \cdot E_1$	1	0	-1	-1A
	1	-5	3	0A
$-1 \cdot E_1$	-1	0	1	1A
E_2		-1	-1	-3A
		-5	4	1A
$-5 \cdot E_2$		5	5	15A
			9	16A

We vinden eerst het *recursieve* stelsel (bestaande uit de rijen E_1 , E_2 en de laatste rij):

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 &= -1\text{A} \\ -I_2 - I_3 &= -3\text{A} \\ 9I_3 &= 16\text{A} \end{aligned} \quad (1-42)$$

De oplossing is: $I_1 = \frac{7}{9}\text{A}$, $I_2 = \frac{11}{9}\text{A}$, $I_3 = \frac{16}{9}\text{A}$.

De uitgaande stroom I_c krijgen we ten slotte uit vergelijking (c) van het stelsel lineaire vergelijkingen (1-38):

$$I_c = I_2 + I_3 = \left(\frac{11}{9} + \frac{16}{9}\right)\text{A} = \frac{27}{9}\text{A} = 3\text{A} \quad (1-43)$$

1.6 Het binomium van Newton

Een *tweeterm* is een som met twee termen (algemene vorm $a + b$). De *n-de macht* van zo'n tweeterm kunnen we met het *binomium van Newton* als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots \\ &\dots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + b^n \end{aligned} \quad (1-44)$$

($n \in \mathbb{N}^*$). De coëfficiënten $\binom{n}{k}$ (lees: n over k) noemen we *binomiaalcoëfficiënten*. Deze zijn als volgt gedefinieerd:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \quad (1-45)$$

($k, n \in \mathbb{N}^*$; $k \leq n$). We definiëren ook:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad (1-46)$$

Met de *faculteitsnotatie* kunnen we de binomiaalcoëfficiënten als volgt opschrijven¹⁰⁾:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} \quad (1-47)$$

Het *binomium van Newton* kan onder gebruikmaking van het somteken ook worden geschreven als

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad (1-48)$$

Samenvatting:

Het binomium van Newton (voor natuurlijke exponenten n)

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \end{aligned} \quad (1-49)$$

De berekening van de *binomiaalcoëfficiënten* volgt uit de formule:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} \quad (0 < k \leq n) \quad (1-50)$$

Voor $k=0$ schrijven we $\binom{n}{0} = 1$

Opmerkingen

- (1) De termen in formule 1-49 zijn *producten van machten* van a en b , waarbij de exponent van a telkens met 1 *afneemt*. In iedere term is de *som van de exponenten* gelijk aan n .

¹⁰⁾ $n!$ (we zeggen: n faculteit) is gedefinieerd als het product van de eerste n natuurlijke getallen:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Bovendien definiëren we: $0! = 1$.

Voorbeelden

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

■ **Voorbeelden**

- (1) De binomiaalcoëfficiënt $\binom{6}{4}$ staat op de 7e rij op de 5e plaats en is gelijk aan 15.

Berekening met definitie van formule (1-50):

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 3 \cdot 5 = 15$$

- (2) Voor $n = 2$ vinden we de onderstaande, uit de middelbareschoolwiskunde bekende, merkwaardige producten:

$$(a + b)^2 = a^2 + \binom{2}{1}ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{eerste merkwaardige product})$$

$$(a - b)^2 = a^2 - \binom{2}{1}ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (\text{tweede merkwaardige product})$$

- (3) Op vergelijkbare wijze vinden we voor $n = 3$:

$$(a + b)^3 = a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- (4) We schrijven het binomium $(2x \pm 5y)^3$ uit naar *afnemende* machten van x :

$$\begin{aligned} (2x \pm 5y)^3 &= (2x)^3 \pm 3(2x)^2(5y) + 3(2x)(5y)^2 \pm (5y)^3 = \\ &= 8x^3 \pm 60x^2y + 150xy^2 \pm 125y^3 \end{aligned}$$

- (5) We berekenen 104^3 met het *binomium van Newton*, waarbij we het getal 104 eerst als *som* van de getallen 100 en 4 schrijven:

$$\begin{aligned} 104^3 &= (100 + 4)^3 = 100^3 + \binom{3}{1}100^2 \cdot 4^1 + \binom{3}{2}100^1 \cdot 4^2 + 4^3 = \\ &= 1\,000\,000 + 3 \cdot 10\,000 \cdot 4 + 3 \cdot 100 \cdot 16 + 64 = \\ &= 1\,000\,000 + 120\,000 + 4\,800 + 64 = 1\,124\,864 \end{aligned}$$

■

1.7 Opgaven

1.7.1 Bij paragrafen 1.1 en 1.2

- 1) Schrijf de elementen van de volgende verzamelingen op:

$$M_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ en } |x| \leq 4\}$$

M_2 : de verzameling van alle *priemgetallen* $p \leq 35$

$$S_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ en } 2x^2 + 3x = 2\}$$

$$S_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ en } 2x^2 - 8x = 0\}$$

- 2) $M_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ en } 0 \leq x < 4\}$ en $M_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ en } -2 < x < 2\}$.

Bepaal de verzamelingen: $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M_1 \setminus M_2$.

- 3) Geef de deelverzameling van $\mathbb{N}$ die gedefinieerd wordt door $3n - 15 \leq 4$, eerst door de elementen op te noemen, daarna door de verzameling te beschrijven.

- 4) Welke ordeningsrelaties hebben de getallen $a = 2$, $b = -5$ en $c = 8$ met elkaar?

- 5) Teken de volgende getallenverzamelingen op de getallenlijn:

a) $(2, 10)$ b) $x > 2$ c) $-8 < x < 2$

d) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ en } 1 \leq x < 2\}$

1.7.2 Bij paragraaf 1.3

- 1) Bereken de reële oplossingen van de volgende tweedegraads vergelijkingen:

a) $-4x^2 + 6x - 1 = 0$ b) $4x^2 + 8x - 60 = 0$

c) $x^2 - 10x = 74$ d) $x^2 - 4x + 13 = 0$

e) $-1 = -9(x - 2)^2$ f) $x^2 + 9^x = -19$

g) $5x^2 + 20x + 20 = 0$ h) $(x - 1)(x + 3) = -4$

- 2) Bepaal de parameter c zo, dat de vergelijking $2x^2 + 4x = c$ precies één reële oplossing heeft.

- 3) Welke reële oplossingen hebben de volgende vergelijkingen?

a) $-2x^3 + 8x^2 = 8x$ b) $t^4 - 13t^2 + 36 = 0$

c) $x^3 - 6x^2 + 11x = 0$ d) $x^5 - 3x^3 + x = 0$

e) $2x^4 - 8x^2 - 24 = 0$ f) $(x - 1)^2(x + 2) = 4(x + 2)$

g) $0,5(3x^2 - 6)(x^2 - 25)(x + 3) = 0$

4) Los de volgende wortelvergelijkingen op:

a) $\sqrt{-3 + 2x} = 2$

b) $\sqrt{x^2 + 4} = x - 2$

c) $\sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 1}$

d) $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$

5) Welke reële oplossingen hebben de volgende modulusvergelijkingen?

a) $|x^2 - x| = 24$

b) $|x + 1| = |x - 1|$

c) $|2x + 4| = -(x^2 - x - 6)$

d) $|x^2 + 2x - 1| = |x|$

1.7.3 Bij paragraaf 1.4

1) Bepaal de reële oplossingsverzamelingen van de volgende ongelijkheden:

a) $2x - 8 > |x|$

b) $x^2 + x + 1 \geq 0$

c) $|x| \leq x - 2$

d) $|x - 4| > x^2$

e) $|x^2 - 9| < |x - 1|$

f) $|x - 1| \geq |x + 2|$

g) $-x^2 \leq x + 4$

h) $\frac{x - 1}{x + 1} < 1$

2) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ krijgen we hier reële uitkomsten?

a) $\sqrt{2 - x}$

b) $\sqrt{1 + x^2}$

c) $\sqrt{4 - x^2}$

d) $\sqrt{(1 - x)(x + 2)}$

e) $\sqrt{x^2 - 1}$

f) $\sqrt{\frac{4 - x}{x + 2}}$

1.7.4 Bij paragraaf 1.5

1) Los de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op met de eliminatiemethode van Gauss:

a) $3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$

$8x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 6$

$-2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5$

b)
$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & -6 \\ 0 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c) $u + 5v + w = -10$

$-4u - 2v - 3w = -10$

$3u + v - w = -4$

d) $2x - 4,5y + z = -14,115$

$-3,2x - 4,8y - 8,1z = -16,941$

$5,64x + y - 1,4z = 11,2212$

- 2) Laat zien dat het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

niet oplosbaar is.

- 3) Bepaal alle oplossingen van het homogene stelsel lineaire vergelijkingen:

$$x + y - z = 0$$

$$-x + 2y + 3z = 0$$

$$3y + 2z = 0$$

- 4) Los het volgende stelsel lineaire vergelijkingen op:

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

- 5) Laat zien dat het homogene stelsel

$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$$

$$4x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

$$4x_1 - 2x_2 = 0$$

oneindig veel oplossingen heeft.

- 6) Los de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op:

a) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 15$

b) $-x - y - z = -6$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 2$

$4x + 5y + 3z = 29$

$6x_1 + 16x_2 - 10x_3 - 12x_4 = -22$

$2x - 10y + z = -35$

$-3x - 2y + 3z = -20$

1.7.5 Bij paragraaf 1.6

- 1) Bereken de volgende binomiaalcoëfficiënten:

a) $\binom{13}{4}$

b) $\binom{10}{5}$

c) $\binom{13}{11}$

- 2) Welke waarde heeft de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n+k}{k+1}$?

-
- 3) Bereken de volgende machten met het binomium van Newton:
- a) 102^4 b) 99^5 c) 996^3
- 4) Schrijf de volgende tweetermen uit:
- a) $(x + 4)^5$ b) $(1 - 5y)^4$ c) $(a^2 - 2b)^3$
- 5) Bereken de volgende machten tot op vier decimalen nauwkeurig met het binomium van Newton:
- a) $1,03^{12}$ b) $0,99^{20}$ c) $2,01^8$
- 6) Schrijf de eerste vijf termen op die we krijgen als we $(2 + 3x)^{10}$ volgens het binomium van Newton uitschrijven.
- 7) Bepaal de coëfficiënten van de macht x^5 als de volgende twee uitdrukkingen (machten van tweetermen) volgens het binomium van Newton worden uitgeschreven:
- a) $(1 - 4x)^8$ b) $(x + 0,5a)^{12}$

2 Vectoralgebra

2.1 Basisbegrippen

2.1.1 Definitie van een vector

We krijgen in de natuurwetenschap en de techniek vaak te maken met *scalaire grootheden* en *vectoren*. Van een *scalaire grootheid* is alles bekend als we de *grootte* en de *eenheid* weten; van een *vector* is pas alles bekend als we ook nog de *richting* weten.

Definitie: Grootheden die beschreven worden door een grootte en een richting noemen we *vectoren*. Voor de notatie gebruiken we letters met een pijl erboven:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{r}, \vec{e}, \vec{F}, \vec{M}, \vec{E}$



We kunnen een vector $\vec{a}$ als een pijl tekenen (figuur 2-1). De lengte van de pijl geeft de grootte van de vector aan; dit getal noemen we de *norm* (absolute waarde of lengte) van de vector (notatie: $|\vec{a}|$). De pijlpunt legt de richting (oriëntatie) van de vector vast.

De lengte en de richting leggen de vector eenduidig vast.

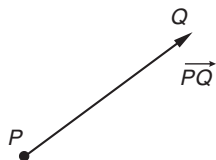
Figuur 2-1

Opmerkingen

- (1) Als we in de *natuurkunde* of de *techniek* over de grootte van een vector praten, moeten we ook de *eenheid* geven waarin *gemeten* wordt. Daarom drukken we de norm van een vector uit in een getal en een eenheid.

Voorbeeld: grootte van een kracht $\vec{F}_1$: $|\vec{F}_1| = F_1 = 100\text{N}$.

- (2) De norm (lengte) van een vector $\vec{a}$ is altijd ≥ 0 : $|\vec{a}| = a \geq 0$.
- (3) Een vector wordt ook eenduidig bepaald door zijn begin- en eindpunt (figuur 2-2). De notatie is dan $\overrightarrow{PQ}$.



Figuur 2-2

■ Voorbeelden

Scalaire grootheden: massa m , temperatuur T , tijd t , arbeid W , weerstand R , spanning V , traagheidsmoment J

Vectoren: afgelegde weg $\vec{s}$, snelheid $\vec{v}$, versnelling $\vec{a}$, kracht $\vec{F}$, impuls $\vec{p}$, moment $\vec{M}$, elektrische veldsterkte $\vec{E}$, magnetische inductie $\vec{B}$ ■

We maken bij het toepassen van vectoren nog onderscheid tussen *vrije*, *glijdende* en *gebonden* vectoren:

1. *Vrije vectoren* mogen we naar believen evenwijdig aan zichzelf verschuiven.
2. *Glijdende vectoren* mogen we naar believen langs hun werklijn verschuiven (bijvoorbeeld krachten die uitgeoefend worden op een vast lichaam).
3. *Gebonden vectoren* beginnen altijd in een vast punt (voorbeelden hiervan zijn de plaatsvector $\vec{r}$, die begint in de coördinatenoorsprong, en de elektrische veldsterkte $\vec{E}$, die bij ieder punt van het veld hoort).

Speciale vectoren

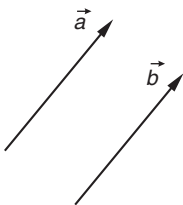
Nulvector $\vec{0}$: Iedere vector met norm nul, $|\vec{0}| = 0$, noemen we *nulvector* (we kunnen aan deze vector *geen* richting toekennen).

Eenheidsvector $\vec{e}$: Iedere vector met norm één noemen we *eenheidsvector*.

Plaatsvector: $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP}$: Deze loopt van de coördinatenoorsprong O naar het punt P .

2.1.2 Gelijkheid van vectoren

Definitie: We noemen twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *gelijk* ($\vec{a} = \vec{b}$), als hun lengte en richting gelijk zijn (figuur 2-3).

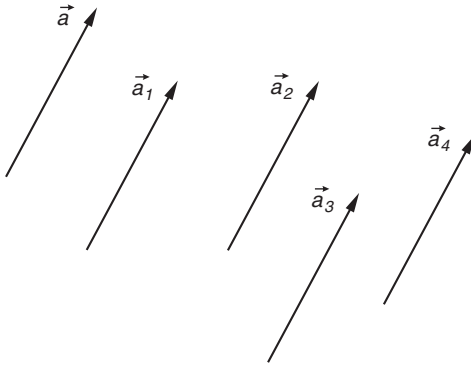


Figuur 2-3
Twee gelijke vectoren

Vectoren zijn dus *gelijk* als we ze door een (aan zichzelf) *parallele verschuiving* (of translatie) kunnen laten samenvallen. Zulke vectoren noemen we *vrije* vectoren. We gaan ons verder alleen met de eigenschappen en rekenoperaties van deze groep vectoren bezighouden.

■ Voorbeeld

De vectoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ en $\vec{a}_4$ (zie figuur 2-4) kunnen we door ze parallel (aan zichzelf) te verschuiven samen laten vallen met de vector $\vec{a}$. Daarom zijn ze volgens bovenstaande definitie gelijk: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_3 = \vec{a}_4 = \vec{a}$.



Figuur 2-4

■

2.1.3 Parallelle, anti-parallelle en collineaire vectoren

Definitie: 1. We noemen twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met *dezelfde* richting *parallel* (zie figuur 2-5). Notatie:

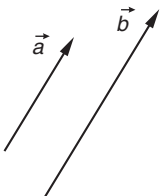
$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

2. Als twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *tegengesteld* gericht zijn, noemen we ze *anti-parallel* (zie figuur 2-6). Notatie:

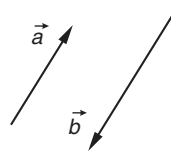
$$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$$

Opmerking

Parallelle vectoren worden ook wel *gelijkgericht parallel* genoemd, en *anti-parallelle* vectoren ook wel *tegengesteld gericht parallel*.



Figuur 2-5
Parallelle vectoren

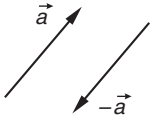


Figuur 2-6
Anti-parallelle vectoren

Twee vectoren die parallel of anti-parallel zijn, liggen (eventueel na een translatie) op dezelfde lijn en we noemen ze daarom *collineair*.

Inverse vector

We nemen nu een willekeurige vector $\vec{a}$. De vector die anti-parallel is met $\vec{a}$ en *dezelfde* lengte heeft, noemen we de *inverse* vector van a . Notatie: $-\vec{a}$ (zie figuur 2-7). We verkrijgen de *inverse* vector $-\vec{a}$ door de richting van vector a om te keren.

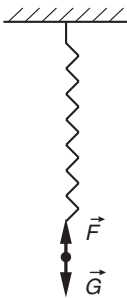


Figuur 2-7
Vector en inverse vector

Inverse vector (figuur 2-7)

Vector $\vec{a}$ en zijn *inverse* vector $-\vec{a}$ hebben dezelfde norm en zijn *tegengesteld* gericht.

■ Voorbeeld



Een gewicht $\vec{G}$ wordt bevestigd aan een elastische spiraalveer, waardoor deze veer wordt uitgerekt (figuur 2-8). De kracht $\vec{G}$ uitgeoefend door het gewicht wordt in de evenwichtstoestand gecompenseerd door de veerkracht $\vec{F}$ van de veer. De vector $\vec{F}$ is de *inverse* vector van $\vec{G}$, dus: $\vec{F} = -\vec{G}$.

Figuur 2-8 Evenwicht van krachten bij een belaste elastische spiraalveer

2.1.4 Vectoroperaties

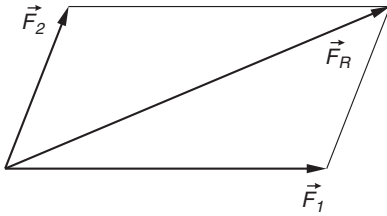
We behandelen in deze paragraaf de elementaire vectoroperaties.

Dat zijn:

1. het optellen van vectoren;
2. het aftrekken van vectoren;
3. het vermenigvuldigen van een vector met een reëel getal (scalair).

2.1.4.1 Het optellen van vectoren

We weten uit de mechanica, dat we twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ die op een massa worden uitgeoefend, kunnen vervangen door één resulterende kracht $\vec{F}_R$. Het effect van de kracht $\vec{F}_R$ is gelijk aan het effect van de twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ samen. We krijgen de resulterende kracht door een *meetkundige* constructie die de *parallellogramregel* heet (zie figuur 2-9). Voor twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ krijgen we door toepassing van deze regel een nieuwe vector $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ die we de *somvector* van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ noemen.

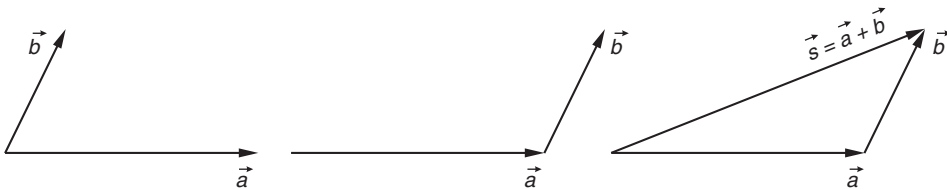
**Figuur 2-9**

Parallelogramregel: $\vec{F}_R$ is de resulterende kracht van $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$

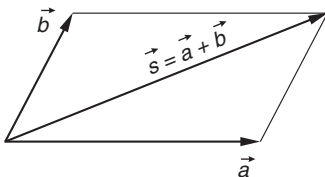
Definitie: *Het optellen van twee vectoren*

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ worden als volgt opgeteld (figuur 2-10):

- (1) We verschuiven de vector $\vec{b}$ parallel aan zichzelf tot zijn beginpunt samenvalt met het eindpunt van de vector $\vec{a}$.
- (2) De vector die begint in het beginpunt van $\vec{a}$ en eindigt in het eindpunt van de vector $\vec{b}$ is de somvector $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

**Figuur 2-10** Het optellen van twee vectoren

We kunnen de somvector $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ ook krijgen door met de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ een parallellogram te construeren; $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ is dan een *diagonaal* (met richting) van dit parallellogram (zie figuur 2-11).

**Figuur 2-11**

Een diagonaal (met richting) van het parallellogram is de somvector $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

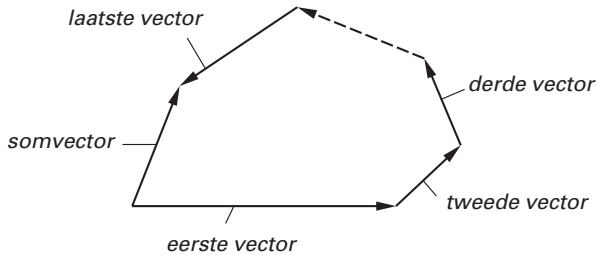
Het optellen van vectoren voldoet aan de volgende rekenregels:

$$\text{Commutatieve wet} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (2-1)$$

$$\text{Associatieve wet} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (2-2)$$

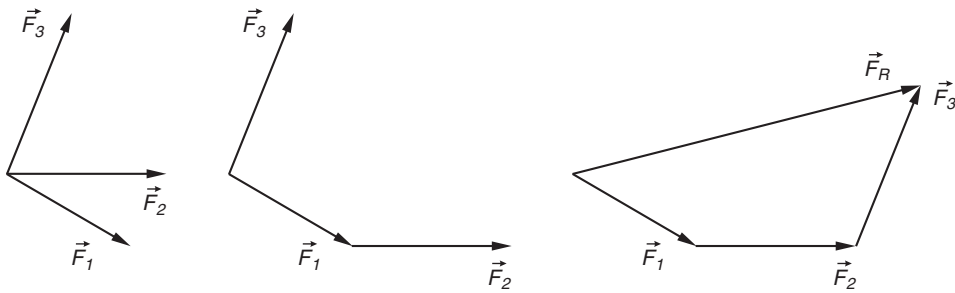
We krijgen de som van méér dan twee vectoren door de vectoren op de bekende manier ‘kop aan staart’ te leggen. Dit doen we door de vectoren parallel aan zichzelf te verschuiven. We krijgen dan een *vectorpolygoon* (polygoon = veelhoek) (figuur 2-12). De som-

vector (of resultante) is de vector die van het beginpunt van de eerste vector naar het eindpunt van de laatste vector loopt.



Figuur 2-12
De constructie van een
somvector (vectorpolygoon)

In figuur 2-13 tellen we drie krachten $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$ op en bepalen zo de resulterende kracht $\vec{F}_R$.



Figuur 2-13 De somvector van drie krachten

Als het vectorpolygoon gesloten is, is de somvector de nulvector. In de natuurkunde betekent dit, dat het totale effect van de vectoren nihil is, dat wil zeggen dat de vectoren elkaar opheffen.

2.1.4.2 Het aftrekken van vectoren

We kunnen het aftrekken van twee vectoren beschouwen als de *inverse operatie van het optellen* (net als bij de reële getallen). We definiëren:

Definitie: Het aftrekken van twee vectoren

Met de *verschilvector* $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bedoelen we de somvector van $\vec{a}$ en $-\vec{b}$ ($-\vec{b}$ is de *inverse* vector van $\vec{b}$):

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (2-3)$$

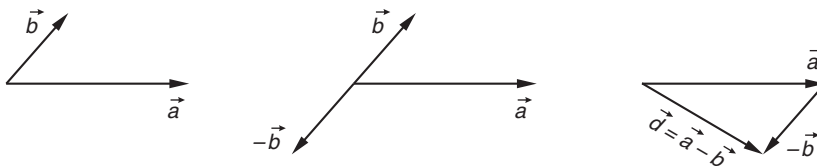
Opmerking

De *verschilvector* $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ is dus de *som* van de vector $\vec{a}$ en de *inverse* vector $\vec{b}$.

De meetkundige constructie gaat als volgt:

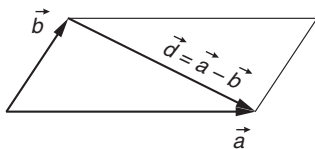
Constructie van de verschilvector $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ (figuur 2-14)

1. We keren eerst de richting van de vector $\vec{b}$ om: we krijgen dan de *inverse* vector $-\vec{b}$.
2. We verschuiven de vector $-\vec{b}$ parallel aan zichzelf totdat zijn beginpunt samenvalt met het eindpunt van de vector $\vec{a}$.
3. De gezochte verschilvector $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ is de vector die loopt van het beginpunt van de vector $\vec{a}$ naar het eindpunt van de vector $-\vec{b}$.



Figuur 2-14 Het verschil van twee vectoren

We kunnen de verschilvector $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ook met de *parallellogramregel* construeren. In figuur 2-15 is deze constructie uitgevoerd.

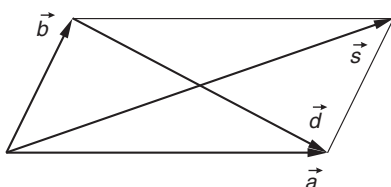


Figuur 2-15

De verschilvector $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ is een diagonaal (mèt richting) van het parallellogram

Parallellogramregel voor het optellen en aftrekken van twee vectoren

We construeren het parallellogram dat wordt opgespannen door de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. De somvector $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ en de verschilvector $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ zijn de twee diagonalen van dit parallellogram (figuur 2-16).



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

Figuur 2-16 De parallellogramregel

2.1.4.3 Het vermenigvuldigen van een vector met een reëel getal

Definitie: Als we de vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een reëel getal (scalair) λ , krijgen we een vector $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ met de volgende eigenschappen:

- (1) De norm van $\vec{b}$ is $|\lambda|$ keer zo groot als de norm van $\vec{a}$:

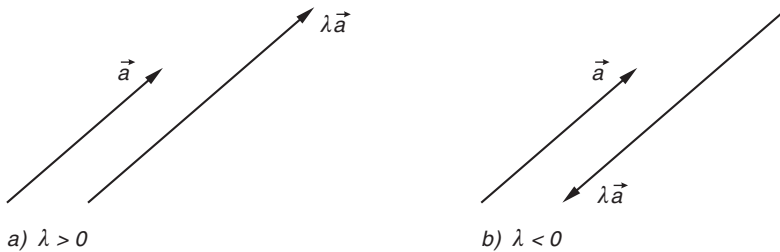
$$|\vec{b}| = |\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \quad (2-4)$$

- (2) De vector $\vec{b}$ is parallel of anti-parallel met $\vec{a}$:

$$\lambda > 0: \quad \vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a} \quad (\text{figuur 2-17a})$$

$$\lambda < 0: \quad \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a} \quad (\text{figuur 2-17b})$$

Voor $\lambda = 0$ krijgen we de nulvector $\vec{0}$.



Figuur 2-17 Vermenigvuldiging van een vector $\vec{a}$ met een reëel getal (scalair) λ

Opmerkingen

- (1) De vectoren $\lambda \vec{a}$ en $\vec{a}$ zijn collineair.
- (2) Vermenigvuldiging van een vector met een *negatief* getal heeft altijd een *omkering van de richting* van de vector tot gevolg (zie in dit verband figuur 2-17b).
- (3) *Deling* van een vector a door een reëel getal (scalair) $\mu \neq 0$ is hetzelfde als *vermenigvuldiging* van a met de omgekeerde waarde $\lambda = 1/\mu$.

Rekenregels ($\lambda \in \mathbb{R}; \mu \in \mathbb{R}$)

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad (2-5)$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \quad (2-6)$$

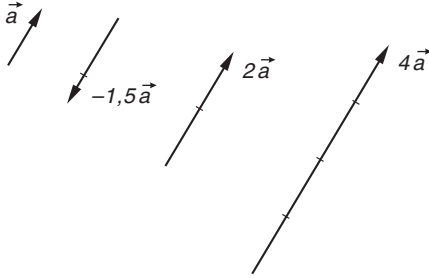
$$(\lambda \mu)\vec{a} = \lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a}) \quad (2-7)$$

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \quad (2-8)$$

■ Voorbeelden

- (1) We vermenigvuldigen de vector $\vec{a}$ achtereenvolgens met de reële getallen 2, $-1,5$ en 4 (figuur 2-18):

$$\begin{aligned}
 2\vec{a}: \quad & 2\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \quad |2\vec{a}| = 2|\vec{a}| = 2a \\
 -1,5\vec{a}: \quad & -1,5\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}, \quad |-1,5\vec{a}| = 1,5|\vec{a}| = 1,5a \\
 4\vec{a}: \quad & 4\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \quad |4\vec{a}| = 4|\vec{a}| = 4a
 \end{aligned}$$



Figuur 2-18 Het vermenigvuldigen van een vector met een reëel getal

(2) *Voorbeelden uit de natuurkunde en de techniek:*

- (a) Kracht, massa en versnelling zijn onderling gerelateerd door de bewegingsvergelijking van Newton $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{a} \quad (\text{omdat } m > 0), \quad |\vec{F}| = m|\vec{a}|, \quad \text{dat wil zeggen } F = ma$$

- (b) Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{v} \quad (\text{omdat } m > 0), \quad |\vec{p}| = m|\vec{v}|, \quad \text{dat wil zeggen } p = mv$$

- (c) Een geladen deeltje (lading q) ondervindt in een elektrisch veld met veldsterkte $\vec{E}$ een kracht $\vec{F} = q\vec{E}$ in de richting van het veld (positieve lading) of in *tegengestelde richting* (negatieve lading):

$$q > 0: \quad \vec{F} \uparrow\uparrow \vec{E} \quad |\vec{F}| = q|\vec{E}| \quad \text{dat wil zeggen } Fq = qE$$

$$q < 0: \quad \vec{F} \uparrow\downarrow \vec{E} \quad |\vec{F}| = |q| \cdot |\vec{E}| \quad \text{dat wil zeggen } F = -qE \quad \blacksquare$$

2.2 Rekenen met vectoren in het platte vlak

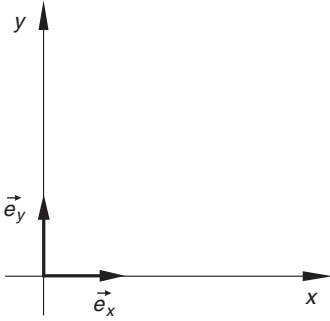
We beginnen met het rekenen met vectoren in het platte (2-dimensionale) vlak, omdat we op die manier de eigenschappen van vectoren en de rekenoperaties het duidelijkst kunnen toelichten. We definiëren in het platte vlak een rechthoekig coördinatenstelsel.

2.2.1 Het ontbinden van een vector in componenten

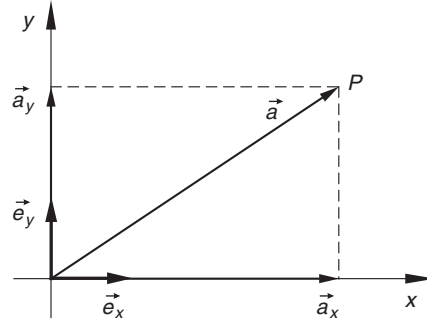
We definiëren het coördinatenstelsel door twee loodrecht op elkaar staande eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$, die we *basisvectoren* noemen (figuur 2-19). Deze basisvectoren leggen de *richting* en de *eenheid* van de coördinaatassen vast.

We bekijken nu een vector $\vec{a}$ die in de oorsprong begint. De *projecties* van deze vector op de x -as en de y -as zijn twee vectoren die we respectievelijk $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$ noemen (figuur 2-20). De vector $\vec{a}$ is de somvector van de vectoren $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \quad (2-9)$$



Figuur 2-19 Definitie van een 2-dimensionaal rechthoekig coördinatenstelsel door twee eenheidsvectoren



Figuur 2-20 Het ontbinden van een vector in componenten

De uit de projecties ontstane vectoren $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$ noemen we de *vectorcomponenten* van $\vec{a}$. We kunnen deze vectorcomponenten als volgt uitdrukken in de eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$:

$$\vec{a}_x = a_x \vec{e}_x, \quad \vec{a}_y = a_y \vec{e}_y \quad (2-10)$$

($\vec{a}_x$ en $\vec{e}_x$ zijn *collineaire* vectoren, $\vec{a}_y$ en $\vec{e}_y$ ook.) We kunnen de vector $\vec{a}$ dus als volgt schrijven:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \quad (2-11)$$

De *scalaire* grootheden a_x en a_y noemen we de *vectorcoördinaten* van $\vec{a}$. Ze worden ook wel de *scalaire vectorcomponenten* genoemd en corresponderen met de coördinaten van het eindpunt P van de vector $\vec{a}$ indien de vector $\vec{a}$ (zoals hier) in het nulpunt begint ($\vec{a}$ is dan de *plaatsvector* van P). In vergelijking (2-11) is de vector a in *componenten* ontbonden. Bij een gegeven basis $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ bepalen de vectorcoördinaten a_x en a_y eenduidig de vector a . Daarom schrijven we in verkorte notatie:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad (2-12)$$

waarbij het symbool $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ een *kolomvector* voorstelt. We zouden in principe ook een *rijvector* (a_x, a_y) kunnen gebruiken, maar zullen hier voor de notatie van vectoren uitsluitend kolomvectoren gebruiken, om verwarring met (coördinaten van) punten te voorkomen. Bovendien verlopen de diverse rekenkundige bewerkingen bij kolomvectoren veel overzichtelijker.

Samenvattend:

Het ontbinden van een vector in componenten

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad (2-13)$$

$\vec{a}_x = a_x \vec{e}_x$, $\vec{a}_y = a_y \vec{e}_y$: vectorcomponenten van $\vec{a}$

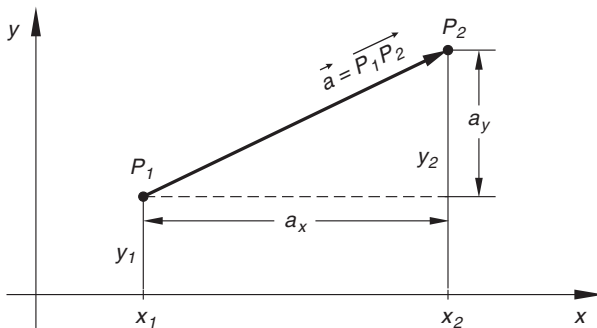
a_x, a_y : vectorcoördinaten van $\vec{a}$

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: kolomvector

Opmerking

Een vectorcoördinaat is hierbij *positief* wanneer de projectie van de vector $\vec{a}$ op de desbetreffende coördinaatas in de *positieve* richting van deze as wijst. Indien de projectie van de vector echter in *tegengestelde* (dat wil zeggen *negatieve*) richting van de coördinaatas wijst, dan is de desbetreffende vectorcoördinaat *negatief*.

Als de vector $\vec{a}$ gegeven is door het beginpunt $P_1 = (x_1, y_1)$ en het eindpunt $P_2 = (x_2, y_2)$, dan ziet de ontbinding van $\vec{a}$ in componenten er als volgt uit (figuur 2-21):



$$a_x = (x_2 - x_1)$$

$$a_y = (y_2 - y_1)$$

Figuur 2-21

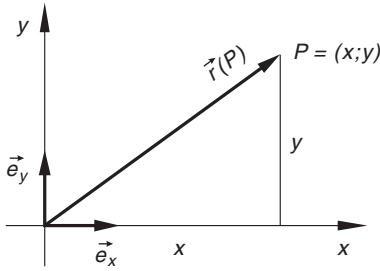
Ontbinding in componenten van een vector met beginpunt $P_1 = (x_1, y_1)$ en eindpunt $P_2 = (x_2, y_2)$

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1) \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

Het ontbinden in componenten van speciale vectoren

De plaatsvector $P = (x, y)$ die loopt van de oorsprong O naar het punt $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP}$ wordt als volgt in componenten ontbonden:

$$\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2-15)$$



Figuur 2-22
De plaatsvector van een punt

De *basisvectoren* (eenheidsvectoren) $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ worden als volgt in componenten ontbonden:

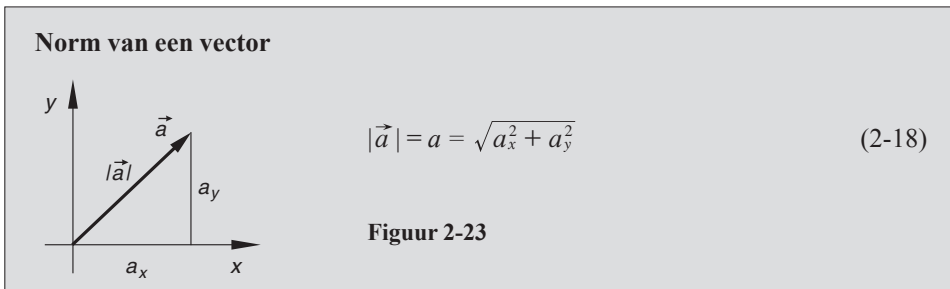
$$\vec{e}_x = 1\vec{e}_x + 0\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = 0\vec{e}_x + 1\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2-16)$$

De *nulvector* $\vec{0}$ wordt als volgt ontbonden:

$$\vec{0} = 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

Norm van een vector

De *norm* van een vector $\vec{a}$ kunnen we afleiden uit de *stelling van Pythagoras* (zie figuur 2-23):



Gelijkheid van vectoren

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn *gelijk* als de overeenkomstige coördinaten gelijk zijn:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, \quad a_y = b_y \quad (2-19)$$

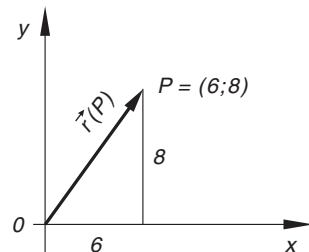
■ Voorbeelden

- (1) De plaatsvector van het punt $P = (6, 8)$ is
(zie figuur 2-24):

$$\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP} = 6\vec{e}_x + 8\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

De norm van deze vector is:

$$|\vec{r}(P)| = r(P) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$



Figuur 2-24

- (2) De vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ die loopt van $P_1 = (2, 4)$ naar $P_2 = (-4, 1)$ wordt als volgt in componenten ontbonden (zie figuur 2-25):

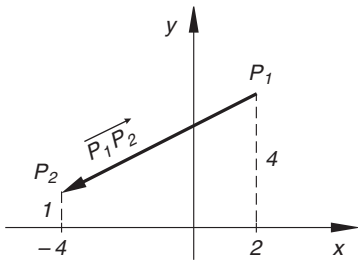
$$a_x = x_2 - x_1 = -4 - 2 = -6$$

$$a_y = y_2 - y_1 = 1 - 4 = -3$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = -6\vec{e}_x - 3\vec{e}_y = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

De norm van deze vector is:

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 6,71$$



Figuur 2-25

■

2.2.2 Vectoroperaties

2.2.2.1 Het vermenigvuldigen van een vector met een scalair (reëel getal)

Als we een vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een reëel getal λ , moeten we elke component met λ vermenigvuldigen; dat wil zeggen, elke vectorcoördinaat wordt met λ vermenigvuldigd.

Het vermenigvuldigen van een vector met een reëel getal

Als we een vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een reëel getal λ , moeten we beide vectorcoördinaten met λ vermenigvuldigen:

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \end{pmatrix} \quad (2-20)$$

Opmerking

Omgekeerd geldt: wanneer de scalaire vectorcomponenten een *gemeenschappelijke* factor bezitten, dan mag die *voor* de kolomvector worden geschreven.

■ **Voorbeelden**

$$(1) \vec{a} = 4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

We vermenigvuldigen deze vector achtereenvolgens met de reële getallen $\lambda_1 = 6$ en $\lambda_2 = -10$ en verkrijgen op die manier de onderstaande vectoren:

$$6\vec{a} = 6 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -18 \end{pmatrix} = 24\vec{e}_x - 18\vec{e}_y$$

$$-10\vec{a} = -10 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \end{pmatrix} = -40\vec{e}_x + 30\vec{e}_y$$

Hierbij geldt:

$$6\vec{a} \uparrow \vec{a} \quad \text{en} \quad -10\vec{a} \uparrow \vec{a}$$

- (2) Toegestane schrijfwijzen voor een krachtvector $\vec{F}$ in het platte vlak, met de scalaire vectorcomponenten $F_x = 15 \text{ N}$ en $F_y = 6 \text{ N}$ zijn (waarbij de eenheid als een *scalair* wordt behandeld):

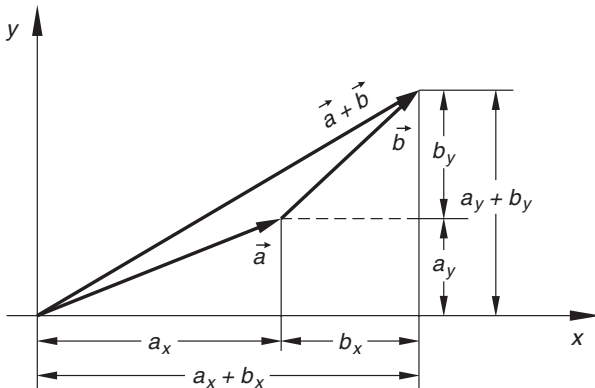
$$\vec{F} = (15 \text{ N})\vec{e}_x + (6 \text{ N})\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 15 \text{ N} \\ 6 \text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ N}$$

■

2.2.2.2 Optellen en aftrekken van vectoren

We zien in figuur 2-25, dat als we twee vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ bij elkaar optellen, we de *componenten* van die vectoren bij elkaar moeten tellen.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} \quad (2-21)$$



Figuur 2-26

Het optellen van twee vectoren door de componenten bij elkaar te tellen

Ook het aftrekken van twee vectoren moeten we *componentgewijs* doen, (immers: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$):

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix} \quad (2-22)$$

Optellen en aftrekken van twee vectoren

Vectoren worden componentgewijs opgeteld of afgetrokken:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix} \quad (2-23)$$

Opmerking

Deze regel geldt ook voor het optellen of aftrekken van *eindig* veel vectoren.

■ Voorbeelden

(1) Gegeven zijn de kolomvectoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bereken de vector $\vec{s} = \vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{c}$. Hoe groot is de norm van deze vector?

Oplossing:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 - 15 \\ -3 + 10 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{(-15)^2 + (-3)^2} = \sqrt{234} = 15,3$$

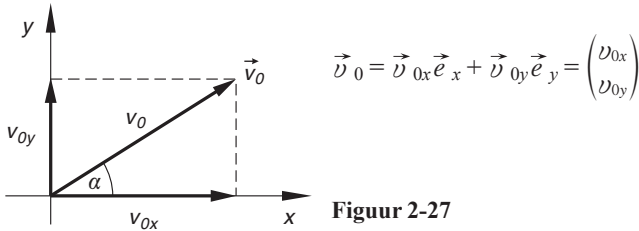
(2) Op een puntmassa worden tegelijkertijd de krachten $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 4 \text{ N} \\ 5 \text{ N} \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \text{ N} \\ 3 \text{ N} \end{pmatrix}$ en $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 4 \text{ N} \\ 1 \text{ N} \end{pmatrix}$ uitgeoefend. Door welke resulterende kracht $\vec{F}_R$ kunnen we deze drie krachten vervangen?

Oplossing:

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \\ &= \begin{pmatrix} 4 \text{ N} \\ 5 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \text{ N} \\ 3 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \text{ N} \\ 1 \text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \text{ N} - 2 \text{ N} + 4 \text{ N} \\ 5 \text{ N} + 3 \text{ N} + 1 \text{ N} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 \text{ N} \\ 9 \text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ N} \end{aligned}$$

- (3) *Worp schuin omhoog*: Een lichaam wordt onder een hoek α met een snelheid v_0 weggeschoten (figuur 2-27). Ontbind de snelheidsvector $\vec{v}_0$ in componenten.

Oplossing:



Figuur 2-27

Uit de rechthoekige driehoek in figuur 2-27 volgt:

$$\cos \alpha = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

Dus de ontbinding in componenten van de snelheidsvector $\vec{v}_0$ is als volgt:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_0 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

■

2.2.3 Het inwendig product van twee vectoren

2.2.3.1 Definitie en berekening van het inwendig product

De volgende vectoroperatie die we bespreken is het *inwendig product* (korter: inproduct) van twee vectoren. Het *inproduct* van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is een scalair. De notatie: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. In de toegepaste wiskunde komen we inproducten bijvoorbeeld bij de definitie van de volgende grootheden tegen:

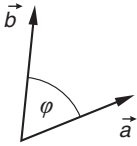
1. De *arbeid* die verricht wordt door een *kracht* bij het verplaatsen van een massa (we komen hier op terug bij de voorbeelden van toepassingen).
2. De *spanning* (potentiaalverschil) tussen twee punten in een elektrisch veld.
3. De berekening van de *hoek* tussen twee krachten of in geometrische figuren in het platte vlak (bijvoorbeeld in driehoeken).

Het *inwendig product* of *inproduct* wordt als volgt gedefinieerd:

Definitie: Het *inproduct* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ definiëren we als het product van de normen van de beide vectoren en de cosinus van de hoek φ die wordt ingesloten door de beide vectoren (figuur 2-28):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = ab \cdot \cos \varphi \quad (2-24)$$

$$(0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ).$$



Figuur 2-28

Opmerkingen

- (1) Het inproduct is een *scalaire* grootheid (reëel getal).
- (2) Merk op dat in de definitie van het inproduct (formule 2-24) de daarin voorkomende hoek φ altijd de *kleinste* van de twee hoeken is die de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met elkaar maken.

Rekenregels

Het inproduct is zowel een *commutatieve*, als een *distributieve* operatie:

$$\text{Commutatieve wet} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (2-25)$$

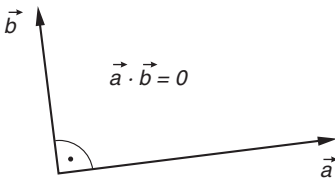
$$\text{Distributieve wet} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (2-26)$$

Verder geldt voor een willekeurig reëel getal λ :

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) \quad (2-27)$$

Orthogonale vectoren

Het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ van twee van de nulvector *verschillende* vectoren kan alleen gelijk zijn aan 0, als $\cos \varphi = 0$, dus $\varphi = 90^\circ$. Als $\varphi = 90^\circ$, staan de vectoren *loodrecht* op elkaar (dit heten *orthogonale vectoren*, zie figuur 2-29).



Figuur 2-29
Orthogonale vectoren

Orthogonaliteit van twee vectoren (figuur 2-29)

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ (die beide niet gelijk zijn aan de nulvector) staan *loodrecht* op elkaar (zijn dus orthogonaal) als hun inproduct gelijk is aan 0:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad (2-28)$$

De *eenheidsvectoren* $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ zijn bijvoorbeeld orthogonale vectoren:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0 \quad (2-29)$$

Het inproduct van een vector $\vec{a}$ met zichzelf is:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2 = a^2 \geq 0 \quad (2-30)$$

De norm van een vector $\vec{a}$ kunnen we dus berekenen met het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{a}$:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (2-31)$$

Zo krijgen we bijvoorbeeld voor de *eenheidsvectoren* (basisvectoren) $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = |\vec{e}_x|^2 = 1, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = |\vec{e}_y|^2 = 1 \quad (2-32)$$

Berekening van een inproduct uit de scalaire vectorcomponenten (vectorcoördinaten)

We kunnen het inproduct van twee vectoren $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$ en $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$ ook uit de vectorcoördinaten berekenen (we gebruiken bij deze afleiding de rekenregels (2-26) en (2-27))

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) = \\ &= a_x b_x \underbrace{(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x)}_1 + a_x b_y \underbrace{(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y)}_0 + a_y b_x \underbrace{(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x)}_0 + a_y b_y \underbrace{(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y)}_1 = \\ &= a_x b_x + a_y b_y \end{aligned} \quad (2-33)$$

In de praktijk gebruiken we voor de berekening van het *inproduct* de onderstaande formule:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y \quad (2-34)$$

We kunnen deze resultaten als volgt samenvatten:

Berekening van het inproduct uit de vectorcoördinaten

Het *inproduct* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kan als volgt uit de vectorcoördinaten van de twee vectoren worden berekend:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y \quad (2-35)$$

Regel: eerst de afzonderlijke componenten vermenigvuldigen en vervolgens de producten optellen.

Een inwendig product kan zodoende op *twee verschillende* manieren worden berekend: *ofwel* overeenkomstig de definitie van het inproduct (formule (2-24)) wanneer de absolute waarden (normen) en de ingesloten hoek van de beide vectoren bekend zijn, *ofwel* uit de vectorcoördinaten overeenkomstig formule 2-35:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y \quad (2-36)$$

■ Voorbeelden

(1) We berekenen het inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = -3 + 10 = 7$$

(2) De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn *orthogonaal* (staan dus loodrecht op elkaar) omdat hun inproduct *gelijk is aan nul*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -1 + 1 = 0 \quad \blacksquare$$

2.2.3.2 De hoek tussen twee vectoren

Bij de berekening van de door twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ ingesloten hoek φ gebruiken we vergelijking (2-36), waaruit we eerst $\cos \varphi$ oplossen:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \quad (2-37)$$

Hieruit kunnen we φ oplossen:¹⁾

De hoek tussen twee vectoren (figuur 2-28)

De door de vectoren a en b ingesloten hoek φ kan als volgt worden berekend:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right) \quad (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0) \quad (2-38)$$

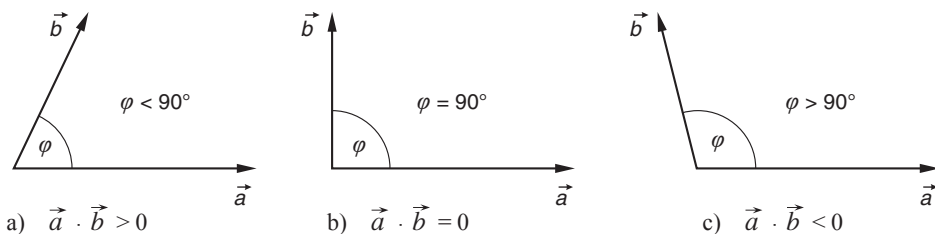
Opmerking

Uit het *teken* van het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kunnen al conclusies worden getrokken met betrekking tot de *hoek* φ tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ (figuur 2-30):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Rightarrow \varphi < 90^\circ \quad (\text{scherpe hoek; figuur 2-30a})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ \quad (\text{rechte hoek; figuur 2-30b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Rightarrow \varphi > 90^\circ \quad (\text{stompe hoek; figuur 2-30c})$$

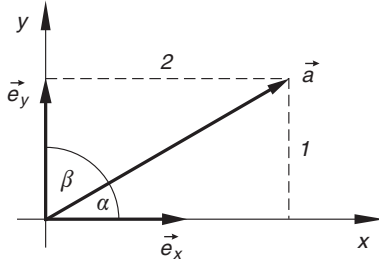


Figuur 2-30 Hoek tussen twee vectoren die niet gelijk zijn aan de nulvector

¹⁾ Om de onbekende hoek φ uit vergelijking (2-37) op te lossen, gebruiken we de inverse van de cosinusfunctie: de arccosinusfunctie, die in het volgende hoofdstuk nog uitvoerig aan de orde zal komen.

■ Voorbeelden

- (1) Hoe groot zijn de hoeken tussen de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en de beide coördinaatassen (figuur 2-31)?



Figuur 2-31

Oplossing: de gevraagde hoeken α en β zijn, zoals uit figuur 2-31 blijkt, precies de ingesloten hoeken van de vector $\vec{a}$ met de beide *eenheidsvectoren* $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. We kunnen die hoeken daarom berekenen door de *inproducten* van vector a met deze eenheidsvectoren te bepalen. Er geldt namelijk:

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_x = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_x| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_x}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_x|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_y| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_y|}$$

We berekenen eerst de in de vergelijkingen voor α en β voorkomende *inproducten* en *normen*:

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \vec{a} \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad |\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$$

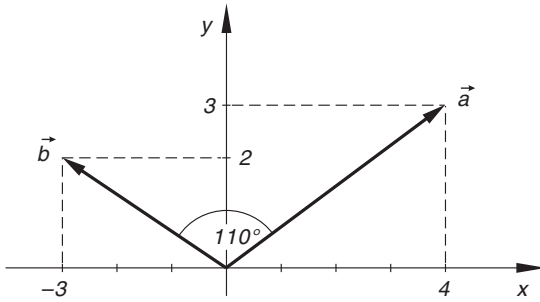
Op die manier vinden we:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_x}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_x|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26,6^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_y|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 63,4^\circ$$

Controle: er geldt (zoals verwacht) $\alpha + \beta = 90^\circ$.

- (2) We willen de *hoek* φ berekenen tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (zie figuur 2-32).



Figuur 2-32

Met

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5, \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -12 + 6 = -6$$

vinden we conform formule (2-38) deze waarde:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right) = \arccos \left(\frac{-6}{5 \cdot \sqrt{13}} \right) = \\ &= \arccos(-0,3328) = 109,4^\circ \end{aligned}$$

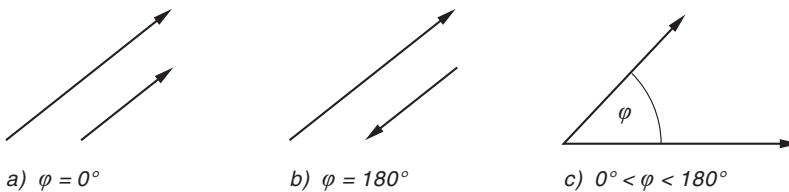
■

2.2.4 Lineair onafhankelijke vectoren

Uit paragraaf 2.2.1 weten we: elke vector $\vec{a}$ kan *eenduidig* worden geschreven als *lineaire combinatie* van de eenheidsvectoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y$:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \quad (2-39)$$

(*coördinatschrijfwijze*). De vectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ vormen daarbij de zogenaamde *basis* van het vlak waarin de vector ligt, en vormen dus een *tweedimensionale* ruimte en worden daarom *basisvectoren* genoemd. In principe kunnen we voor deze basis *twee willekeurige*, niet aan de nulvector gelijke, vectoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ kiezen, vooropgesteld dat deze (zoals $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$) *niet collineair* zijn (dus een hoek met elkaar maken die *niet* gelijk is aan 0° of 180° ; zie figuur 2-33).

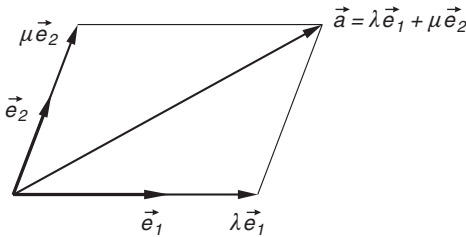


Figuur 2-33 a) en b) collineaire vectoren; c) niet-collineaire vectoren

Elke vector $\vec{a}$ kan zodoende *eenduidig* worden beschreven als een *lineaire combinatie* van deze basisvectoren:

$$\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 \quad (2-40)$$

De reële getallen λ en μ zijn hierin de *vectorcoördinaten* van $\vec{a}$ ten opzichte van de basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ (zie figuur 2-34).



Figuur 2-34

Voorstelling van een vector a bij basis e_1, e_2

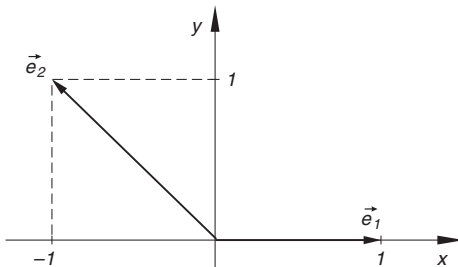
Basisvectoren zijn altijd *lineair onafhankelijk*, dat wil zeggen dat de daarmee gevormde lineaire vectorvergelijking

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0} \quad (2-41)$$

uitsluitend geldt voor $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.²⁾

■ Voorbeeld

De vectoren $\vec{e}_1 = \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn – zoals direct uit figuur 2-35 blijkt – niet-collineair en dus lineair onafhankelijk.



Figuur 2-35

Lineair onafhankelijke vectoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

We zullen deze uitspraak nu rekenkundig bewijzen. Uit de vectorvergelijking

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0} \quad \text{of} \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

volgt het homogene stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 &= 0 & \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 0 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 &= 0 & \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{of}$$

²⁾ De componentennotatie van vectorvergelijking (2-41) levert een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen die *uitsluitend* een *triviale* oplossing heeft ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).

met de *triviale* oplossing $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. De vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ zijn zodoende *lineair onafhankelijk*. ■

Het begrip '*lineaire onafhankelijkheid van vectoren*' kan worden uitgebreid tot *stelsels* van k vectoren.

Definitie: De k vectoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ in een vlak zijn *lineair onafhankelijk* wanneer de lineaire vectorvergelijking

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0} \quad (2-42)$$

alleen een oplossing heeft voor $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Wanneer echter niet alle coëfficiënten in deze vergelijking verdwijnen (0 zijn), dan zijn de k vectoren *lineair afhankelijk*.

Opmerkingen

- (1) Er kan worden bewezen dat er in een vlak *maximaal twee* lineair onafhankelijke vectoren zijn (vandaar ook de benaming 'tweedimensionale' ruimte voor het platte vlak); *meer dan twee* vectoren zijn altijd lineair afhankelijk.
- (2) De k vectoren zijn *lineair afhankelijk* wanneer ze de *nulvector* of *collineaire* vectoren bevatten of wanneer ten minste een van de vectoren als *lineaire combinatie* van de andere vectoren kan worden geschreven.

2.2.5 Een voorbeeld van een toepassing: de resultante van een in een vlak werkend krachtsysteem

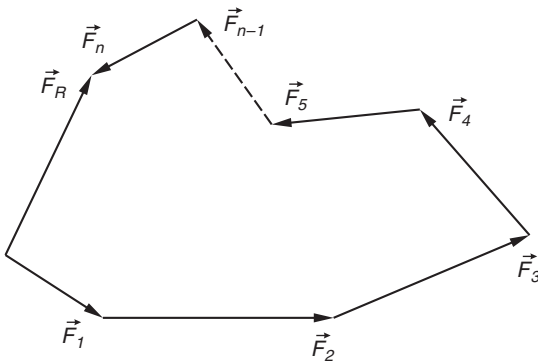
We bespreken een belangrijk probleem uit de mechanica: het bepalen van de resulterende kracht als er meer dan één kracht (de krachten liggen in één vlak) op een puntmassa wordt uitgeoefend. Dit gebeurt door vectoren bij elkaar op te tellen.

Grafische oplossing met behulp van een veelhoek

We tekenen de *krachten* als *vectordiagram*, waarbij de n aangrijpende krachtvectoren $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ op een geschikte schaal worden weergegeven.³⁾

We gaan uit van de vector $\vec{F}_1$ en verschuiven daarna de vector $\vec{F}_2$ parallel aan zichzelf tot dat zijn beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\vec{F}_1$. Daarna verschuiven we $\vec{F}_3$ zodat zijn beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\vec{F}_2$. Zo gaan we door tot alle krachtvectoren 'kop-aan-staart' liggen; de krachtvectoren vormen samen een *veelhoek* (of *polygoon*). De resulterende kracht $\vec{F}_R$ is de vector die loopt van het beginpunt van de vector $\vec{F}_1$ naar het eindpunt van de vector $\vec{F}_n$ (figuur 2-36).

³⁾ Deze schaal bepaalt de omrekening van lengte-eenheden in krachteenheden, bijvoorbeeld $1 \text{ cm} \hat{=} 100 \text{ N}$.



Figuur 2-36
Veelhoek van krachtvectoren

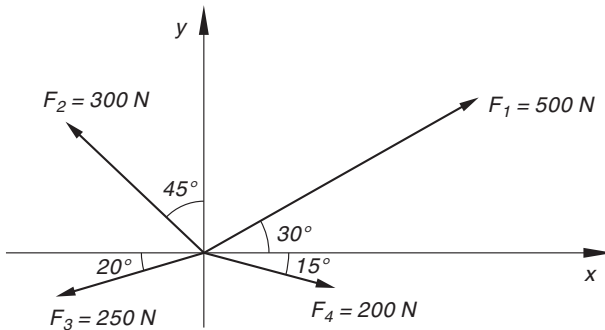
Analytische oplossing

De resulterende kracht $\vec{F}_R$ is de vectorsom van de n krachten:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (2-43)$$

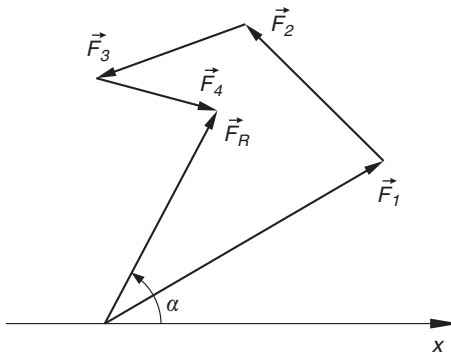
■ Voorbeeld

We bepalen grafisch en analytisch de resultante van de vier krachten uit figuur 2-37.



Figuur 2-37

Grafische oplossing (figuur 2-38)



Afgelezen waarden:

$$F_R \approx 370 \text{ N}$$

$$\alpha \approx 61^\circ$$

Figuur 2-38

Analytische oplossing

We berekenen eerst (met behulp van figuur 2-37) de x - en y -componenten van de vier krachtvectoren en daarna de resultante $\vec{F}_R$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1: F_{1x} &= F_1 \cdot \cos 30^\circ = 500 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ = 433 \text{ N} \\ F_{1y} &= F_1 \cdot \sin 30^\circ = 500 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ = 250 \text{ N} \\ \vec{F}_2: F_{2x} &= F_2 \cdot \cos 135^\circ = 300 \text{ N} \cdot \cos 135^\circ = -212,1 \text{ N} \\ F_{2y} &= F_2 \cdot \sin 135^\circ = 300 \text{ N} \cdot \sin 135^\circ = 212,1 \text{ N} \\ \vec{F}_3: F_{3x} &= F_3 \cdot \cos 200^\circ = 250 \text{ N} \cdot \cos 200^\circ = -234,9 \text{ N} \\ F_{3y} &= F_3 \cdot \sin 200^\circ = 250 \text{ N} \cdot \sin 200^\circ = -85,5 \text{ N} \\ \vec{F}_4: F_{4x} &= F_4 \cdot \cos 345^\circ = 200 \text{ N} \cdot \cos 345^\circ = 193,2 \text{ N} \\ F_{4y} &= F_4 \cdot \sin 345^\circ = 200 \text{ N} \cdot \sin 345^\circ = -51,8 \text{ N}\end{aligned}$$

Resulterende kracht $\vec{F}_R$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \\ &= \begin{pmatrix} 433 \text{ N} \\ 250 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -212,1 \text{ N} \\ 212,1 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -234,9 \text{ N} \\ -85,5 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 193,2 \text{ N} \\ -51,8 \text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179,2 \text{ N} \\ 324,8 \text{ N} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

We kunnen de resulterende kracht echter ook eenduidig bepalen uit de *norm* (absolute waarde) en de in figuur 2-38 ingetekende hoek α :

$$\begin{aligned}|\vec{F}_R| &= \sqrt{(179,2 \text{ N})^2 + (324,8 \text{ N})^2} = \sqrt{137\,607,7 \text{ N}^2} = 371,0 \text{ N} \\ \cos \alpha &= \frac{\vec{F}_R \cdot \vec{e}_x}{|\vec{F}_R| \cdot |\vec{e}_x|} = \frac{\begin{pmatrix} 179,2 \text{ N} \\ 324,8 \text{ N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{371,0 \text{ N} \cdot 1} = \frac{179,2 \text{ N}}{371,0 \text{ N}} = 0,4830 \Rightarrow \\ \alpha &= \arccos 0,4830 = 61,1^\circ\end{aligned}$$

■

2.3 Rekenen met vectoren in de 3-dimensionale ruimte

We hebben ons in paragraaf 2.2 uitgebreid met vectoren en hun eigenschappen in het platte vlak beziggehouden. In deze paragraaf gaan we vectoren in de 3-dimensionale ruimte behandelen. De theorie is helemaal analoog. We hebben echter nog een derde component nodig om de vectoren vast te leggen. Ook hier gelden de rekenregels die we al kennen uit het platte vlak: het vermenigvuldigen van een vector met een scalair getal en ook het optellen en aftrekken van vectoren gaat *per component*. De definitie van het inwendig product en de daaruit volgende eigenschappen gelden ook in de 3-dimensionale ruimte. Een nieuw begrip dat we gaan invoeren, is het uitwendig product van twee vectoren alsmede het uit drie vectoren gevormde *gemengde* of *blokproduct*.