



W.M. Franken
R.A. Bouts

Wiskunde voor statistiek

een voorbereiding

uitgeverij
coutho

WISKUNDE VOOR STATISTIEK

Wiskunde voor statistiek

Een voorbereiding

W.M. Franken

R.A. Bouts

Tweede, herziene druk

uitgeverij | C
coutinho

bussum 2022

© 1995/2002 Uitgeverij Coutinho bv

Alle rechten voorbehouden.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16 h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

Eerste druk 1995

Tweede, herziene druk 2002, zesde oplage 2020

Uitgeverij Coutinho

Postbus 333

1400 AH Bussum

info@coutinho.nl

www.coutinho.nl

Omslag: studio Pietje Precies bv, Hilversum

Noot van de uitgever

Wij hebben alle moeite gedaan om rechthebbenden van copyright te achterhalen. Personen of instanties die aanspraak maken op bepaalde rechten, wordt vriendelijk verzocht contact op te nemen met de uitgever.

ISBN 978 90 6283 317 7

NUR 916

VOORWOORD BIJ DE EERSTE DRUK

Zoals bij vele subfaculteiten in de sociale wetenschappen van de Nederlandse Universiteiten werd ook Pedagogiek/Onderwijskunde van de Katholieke Universiteit Nijmegen in de 70er jaren steeds vaker geconfronteerd met studenten die een onvoldoende wiskundeachtergrond hadden. Zij liepen daardoor vast bij de vakken statistiek en onderzoeksmethoden.

Er werd destijds besloten om studenten met deze zogenaamde deficiëntie voor wiskunde een speciale cursus aan te bieden.

Sedert deze aanpak is het aantal studenten dat "struikelt" over de eerder genoemde vakken aanzienlijk afgenomen. Ten behoeve van deze wiskundecursus is een reader ontwikkeld die in de loop der jaren regelmatig verbeterd is. Het is geworden tot een uitgebalanceerd programma dat enerzijds bekende stof ophaalt, vervolgens het exacte denken stimuleert en tenslotte een aantal begrippen introduceert die in het statistiekonderwijs dat volgt van belang zijn.

Niet alleen hebben evaluaties met studenten aangetoond dat deze aanpak als zeer waardevol wordt ervaren, ook de visitatiecommissie heeft bij het doorlichten van de studierichting in 1993 deze studentvriendelijke aanpak geprezen. Inmiddels werd de reader ook buiten de studierichting gebruikt voor hetzelfde doel.

Dat de reader thans als een volwaardig leerboek is uitgegeven geeft ons voldoening.

Wij hopen dat u als gebruiker van dit boek op het juiste wiskundige niveau wordt gebracht om uw verdere studie met succes te kunnen volgen.

Nijmegen, april 1995

Thea Franken
Lex Bouts

VOORWOORD BIJ DE TWEEDE DRUK

De ervaringen die sedert het verschijnen van de eerste druk in 1995 zijn opgedaan hebben geleerd dat het pure wiskundeaanbod tot en met de kwadratische functie voldoende is en dat meer aandacht moet worden besteed aan specifieke voorbereiding op het vak statistiek. Dit heeft ons ertoe besloten om de onderdelen 'lineair gebroken functies en hun grafische weergave' evenals 'exponentiële en logaritmische functies en hun grafische weergave' te verwijderen. Daartegenover staat een meer uitgebreide uitleg van het sommatieteken met bespreking van de formules voor het berekenen van onder andere het gemiddelde. Dit wordt zowel in de situatie zonder, als met een frequentieverdeling behandeld. Bovendien is na de bespreking van permutaties, variaties en combinaties een korte inleiding in de kansrekening toegevoegd. Wij denken hiermee een betere balans te hebben gevonden tussen enerzijds het wegwerken van de wiskundedeficiëntie en anderzijds een nuttige voorbereiding op de vakken statistiek en onderzoeksmethoden.

Nijmegen, augustus 2002

Thea Franken
Lex Bouts

INHOUDSOPGAVE

1.	VERZAMELINGEN	9
1.1.	Verzamelingen binnen de wiskunde	9
1.2.	Relaties tussen twee of meer verzamelingen	11
1.3.	Getallenverzamelingen	13
	Opgaven	16
2.	BEWERKINGEN	19
2.1.	Definities	19
2.2.	Bewerkingen binnen de verzameling $\mathbb{Z}$	23
2.3.	Eigenschappen van bewerkingen	27
2.4.	Uitbreiding van bewerkingen naar $\mathbb{Q}$	29
2.5.	Machtsverheffen, worteltrekken en logaritmen	32
	Opgaven	43
3.	VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN	51
3.1.	Inleiding	51
3.2.	Lineaire vergelijkingen met één veranderlijke	51
3.3.	Lineaire ongelijkheden met één veranderlijke	53
3.4.	Lineaire vergelijkingen met twee veranderlijken	55
3.5.	Tweedegraads vergelijkingen met één veranderlijke	62
	Opgaven	69
4.	RELATIES, FUNCTIES EN GRAFIEKEN	75
4.1.	Relaties tussen twee verzamelingen	75
4.2.	Grafische weergave van functies	77
4.2.1.	Weergave van een lineaire functie	78
4.2.2.	Weergave van een kwadratische functie	83
	Opgaven	88
5.	SPECIFIEKE BEWERKINGEN BINNEN DE STATISTIEK	91
5.1.	Sommen	91
5.2.	Faculteitsrekenen	102
	Opgaven	109

ANTWOORDEN BIJ DE OPGAVEN	117
Hoofdstuk 1	117
Hoofdstuk 2	118
Hoofdstuk 3	125
Hoofdstuk 4	129
Hoofdstuk 5	133

I. VERZAMELINGEN

1.1 VERZAMELINGEN BINNEN DE WISKUNDE

Het woord 'verzameling' is ons binnen het gewone spraakgebruik bekend. Binnen de wiskunde wordt er het volgende onder verstaan:

Verzameling: een duidelijk afgebakend geheel van objecten, waarbij de objecten aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen, willen ze tot die verzameling behoren. De objecten worden de elementen van de verzameling genoemd.

Notatie van verzamelingen

Een verzameling wordt aangegeven door een opsomming te geven van alle elementen, die tot de verzameling behoren. De elementen worden geplaatst binnen accolades en gescheiden door komma's.

Voorbeeld

Als A: 'de verzameling van de eerste 5 letters van het alfabet' voorstelt, dan kunnen we A als volgt weergeven:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

Een alternatieve notatie voor het weergeven van een verzameling is het omschrijven van de elementen, die tot de verzameling behoren. Deze omschrijving gebruikt men indien:

1. een opsomming van de elementen te uitvoerig is (b.v. de verzameling van getallen groter dan 100).
2. niet alle elementen exact bekend zijn (b.v. de verzameling van miljonairs over de gehele wereld).

Bij het omschrijven van een verzameling geeft men de voorwaarde (het criterium) aan, waaraan alle elementen van de verzameling moeten voldoen. Men kan op een aantal manieren een omschrijving van een zelfde verzameling geven.

Voorbeeld

A: de verzameling van positieve gehele getallen kleiner dan 10

A: de verzameling van positieve gehele getallen van 1 tot en met 9

Beide omschrijvingen geven dezelfde verzameling weer nl.:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Een verzameling wordt dus gekarakteriseerd door de elementen en niet door een omschrijving. Binnen de wiskunde gebruikt men de volgende algemene notatie voor het omschrijven van een verzameling:

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

Verzameling A, bestaande uit de elementen x, waarvoor geldt: $p(x)$. In $p(x)$ wordt de voorwaarde aangegeven, waaraan de elementen x moeten voldoen, willen ze tot de verzameling A behoren. Zo kan men een verzameling S van studenten omschrijven als:

$$S = \{x \mid x \text{ studeert aan een Nederlandse universiteit}\}$$

Elementen van

Beschouw de verzameling $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; dan is:

2 een element van A

5 een element van A

10 geen element van A

Om aan te geven of een 'object' al dan niet een element is van een verzameling gebruikt men de volgende symbolen:

is element van $\in$ is geen element van $\notin$

Zo kunnen we bovenstaande beweringen vervangen door de volgende symboliek: $2 \in A$, $5 \in A$ en $10 \notin A$

1.2 RELATIES TUSSEN TWEE OF MEER VERZAMELINGEN

De lege verzameling, gelijke verzamelingen en deelverzamelingen

De lege verzameling: een verzameling die geen enkel element bevat is de lege verzameling. Symbool:

de lege verzameling $\emptyset$

Gelijke verzamelingen: twee verzamelingen A en B zijn gelijk, indien ze dezelfde elementen bevatten en géén andere. Symbool:

gelijke verzamelingen =

Voorbeeld

$$A = \{1, 3, 4, 6\} \quad B = \{1, 4, 6, 3\}$$

A en B bevatten dezelfde elementen en geen andere: $A = B$.

Deelverzameling: Verzameling A is een deelverzameling van B, indien B alle elementen van de verzameling A bevat. Symbool:

deelverzameling $\subset$

Voorbeeld 1

Beschouw de verzameling S van studenten uit paragraaf 1.1 en de verzameling K van studenten aan de Katholieke Universiteit Nijmegen. De verzameling S omvat de verzameling K, derhalve is $K \subset S$.

Voorbeeld 2

$A = \{3, 5, 7\}$ en B: de verzameling van alle oneven gehele getallen. Verzameling B bevat de elementen 3, 5, 7 dus $A \subset B$. Ga zelf na dat niet geldt: $B \subset A$.

Opmerkingen:

1. De lege verzameling is een deelverzameling van elke verzameling
2. Wanneer $B \subset A$, dan geldt tevens dat de verzameling A de verzameling B **omvat** ($A \supset B$)

De doorsnede en vereniging van verzamelingen

De doorsnede van twee verzamelingen A en B is de verzameling

die bestaat uit die elementen, die zowel tot A als tot B behoren.
Symbool:

doorsnede $\cap$

Beschouw de verzameling S van studenten uit paragraaf 1.1 en de verzameling A van leden van een studentenvereniging. De doorsnede van deze twee verzamelingen zijn die studenten, die tevens lid zijn van een studentenvereniging:

$$S \cap A = \{ x \mid x \text{ is student én } x \text{ is lid van een studentenvereniging} \}.$$

In de volgende voorbeelden wordt steeds gebruikgemaakt van de volgende getallenverzamelingen:

$$A = \{3, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$C = \{2, 4, 5, 6, 7\}$$

Twee verzamelingen, waarvan de doorsnede de lege verzameling is, noemt men **disjuncte** verzamelingen. Beschouw de verzameling U van Pedagogiek studenten in Utrecht en de verzameling G van Pedagogiek studenten in Groningen. De doorsnede van deze twee verzamelingen bevat geen enkel element, de doorsnede is dus de lege verzameling. De verzameling U en G noemt men dan disjuncte verzamelingen (ook wel twee elkaar uitsluitende verzamelingen).

Voorbeeld

$$A = \{3, 5, 7\} \quad B = \{1, 2, 4\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

De vereniging van twee verzamelingen A en B is die verzameling, waarvan de elementen tot A óf tot B óf tot beide behoren.
Symbool:

vereniging $\cup$

Voorbeeld

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \quad A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

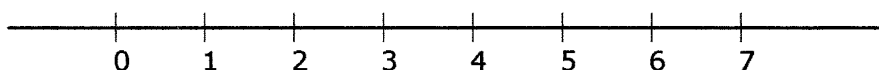
1.3 GETALLENVERZAMELINGEN

De eenvoudigste getallen, die we kennen zijn die getallen, die we gebruiken als weergave voor het proces 'tellen'. Dit zijn de positieve gehele getallen, ook wel de verzameling van de Natuurlijke getallen genoemd.

N verzameling van positieve gehele getallen en het getal 0

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots \}$$

Hoewel het getal 0 geen weergave is van een telling wordt dit toch beschouwd als een element van N. Dit systeem van getallen kunnen we symbolisch afbeelden op een getallenrechte:



Voor twee willekeurige elementen a en b uit de verzameling N geldt dat, indien a rechts van b ligt op de getallenrechte, a groter is dan b

$$a > b$$

en indien a links van b ligt op de getallenrechte, a kleiner is dan b.

$$a < b$$

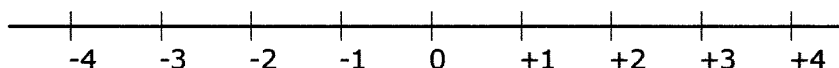
Zo is bijvoorbeeld: $100 > 5$; $6 < 10$.

Naast positieve gehele getallen, kent men ook negatieve gehele getallen, deze liggen op de getallenrechte links van 0, deze getallen zijn niet meer op te vatten als weergave van een telling.

Alle gehele getallen tezamen (positieve én negatieve en het getal 0) vormen de verzameling Z:

Z verzameling van positieve en negatieve gehele getallen én het getal 0

$$Z = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$



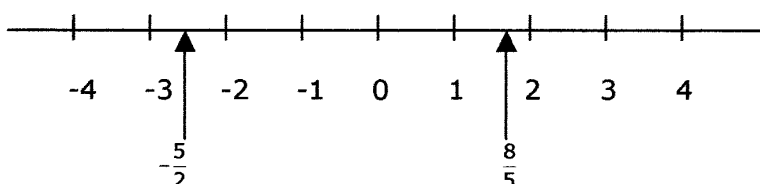
Ook voor willekeurige elementen a en b uit de verzameling Z geldt: als a rechts ligt van b op de getallenrechte dan is $a > b$;

indien a links ligt van b, dan is $a < b$.

Zo is bijvoorbeeld: $-4 < -3$; $-4 < 4$; $-2 > -3$; $-2 < 3$; $0 > -2$

Buiten positieve en negatieve gehele getallen, liggen op de getallenrechte nog oneindig veel 'gebroken getallen', b.v., $-3\frac{2}{3}$ en $8\frac{3}{5}$. De verzameling Z , uitgebreid met deze gebroken getallen vormen de verzameling Q van rationale getallen.

Q verzameling van getallen $\frac{a}{b}$ waarbij $a, b \in Z$ en $b \neq 0$



Zo is bijvoorbeeld: $-\frac{10}{3} \in Q$, $\frac{5}{5} \in Q$ en $-\frac{27}{39} \in Q$

Merk op dat: $N \subset Z \subset Q$.

Ofschoon Q oneindig veel punten op de getallenrechte definieert, zijn er nog punten (getallen) die niet rationaal zijn, dus niet te schrijven zijn als de ratio $\frac{a}{b}$ waarbij $a, b \in Z$ én $b \neq 0$. Deze getallen vormen de irrationale getallen. Voorbeelden hiervan zijn:

1. Uitkomsten van worteltrekking. b.v. $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ d.w.z. er bestaat

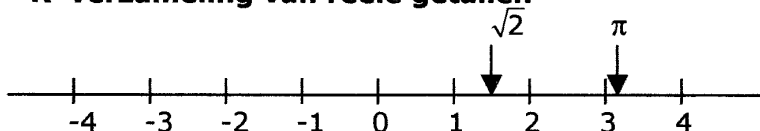
geen enkel getal $\frac{a}{b}$ dat in het kwadraat exact 2 oplevert

2. Uitkomsten van een logaritmische bewerking

3. Transcendente getallen. Dit zijn getallen, die niet beschouwd kunnen worden als resultaat van een algebraïsche bewerking, zoals het getal $\pi = 3.141\dots$ (geeft de verhouding van de omtrek van een cirkel tot de middellijn weer).

De verzameling Q , uitgebreid met de verzameling van irrationale getallen vormen tezamen de verzameling R van de reële getallen.

R verzameling van reële getallen



Met de omschrijving van de verzameling R is ieder punt op de getallenrechte gedefinieerd.

Merk op dat $N \subset Z \subset Q \subset R$:

Opmerkingen:

1. Decimale breuk

Zowel rationale als irrationale getallen zijn als decimale breuk te schrijven. Bijvoorbeeld de rationale getallen:

$$\frac{3}{2} = 1.5 \quad \frac{1}{7} = 0.142857142857... \quad \frac{1}{6} = 0.1666666... \text{ en het}$$

irrationale getal $\sqrt{2} = 1.414213562..$

Het verschil tussen rationale en irrationale getallen (als

decimale hebben óf een eindig aantal decimalen, zoals $\frac{3}{2} = 1.5$

óf een reeks decimalen, die steeds herhaald worden, zoals bij $\frac{1}{6}$

$= 0.166666..$ Bij $\frac{1}{7}$ wordt steeds de reeks 142857 herhaald.

Irrationale getallen hebben een oneindig aantal decimalen, die geen vast patroon vormen, zoals $\sqrt{2} = 1.41423562.....$

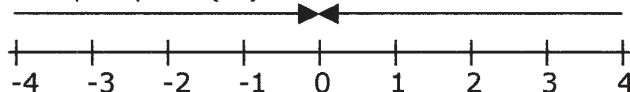
2. Absolute waarden van reële getallen.

Onder de absolute waarde van een getal wordt de waarde van het getal verstaan, ongeacht het + of - teken. Symbool:

Absolute waarde $|a|$ en $a \in R$.

$$\text{Zo is: } |2| = 2 \quad |-2| = 2 \quad |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

De absolute waarde van een getal wordt ook wel aangeduid als de afstand van het getal tot het 0-punt. De absolute waarde van een negatief getal wordt dan beschouwd als de afstand van een getal dat links van 0 ligt tot het 0-punt; van een positief getal als de afstand van een getal dat rechts ligt van het 0-punt. Zo is de afstand van +4 tot 0 gelijk aan 4; de afstand van -4 tot 0 ook gelijk aan 4. De afstand van een negatief getal tot 0 is dus gelijk aan het tegengestelde van dat getal : $-4 | = -(-4) = 4$.



In het algemeen geldt: $a \in R$

$$|a| = a \text{ indien } a > 0$$

$$|a| = -a \text{ indien } a < 0$$

OPGAVEN

1. Gegeven:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

a. $A \cap B =$

b. $A \cap C =$

c. $B \cap C =$

d. $A \cap B \cap C =$

e. $A \cup B =$

f. $A \cup B \cup C =$

2. Geef bij de volgende beweringen aan of zij juist/onjuist zijn:

a. $\{2, 4\} \subset (A \cap B)$

b. $6 \in (A \cap B \cap C)$

c. $\{6\} \subset (A \cap B \cap C)$

d. $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

3. Gegeven:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{5, 6\}$$

$$C = \{1, 2, 5, 6\}$$

$$D = \{2, 3, 4\}$$

$$E = \{2, 3, 4, 5\}$$

Vul in onderstaande beweringen één van de volgende symbolen in, zodat er een juiste bewering ontstaat:

$\in, \notin, \subset, \supset, \cap, \cup$

a. $B \dots C$

b. $B \dots C = B$

c. $B \dots C = C$

d. $B \dots D = \emptyset$

e. $C \dots D = A$

f. $D \dots E = D$

g. $4 \dots C \cap B$

h. $D \dots E \dots A$

4. Beschouw de volgende verzamelingen:

$$A = \{ x \mid x \text{ is een even getal en } x < 20; x \in \mathbb{N} \}$$

$$B = \{ x \mid x \text{ is een veelvoud van 3 en } x < 20; x \in \mathbb{N} \}$$

$$C = \{ x \mid x \text{ is een oneven getal en } x < 20; x \in \mathbb{N} \}$$

a. Bepaal de elementen van A, B en C.

b. $A \cap B =$

c. $A \cap C \cap B =$

d. $A \cup B =$

5. Voor de getallenverzamelingen geldt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

In welke getallenverzameling resulteert elk van de volgende relaties?

a. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} =$

b. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} =$

c. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{R} =$

d. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} =$

e. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} =$

f. $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}) =$



2. BEWERKINGEN

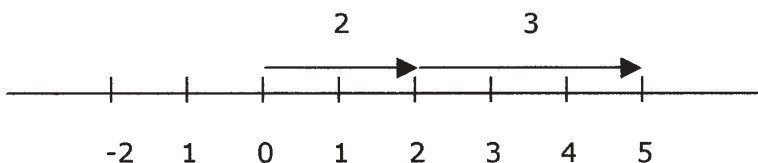
2.1 DEFINITIES

Met de getallen, die we in hoofdstuk 1 hebben gedefinieerd kunnen we bewerkingen uitvoeren. De bewerkingen, die we zullen behandelen, hebben alleen betrekking op de reële getallen. De meest primitieve bewerking, die we kennen is het optellen van twee of meer getallen. Alle andere bewerkingen zijn daar min of meer van afgeleid.

Optellen: is het resultaat van twee of meer 'tellingen'

Voorbeeld

$$2 + 3 = +5$$



$$-2 + 3 = +1$$



Algemeen: $a + b = c$

Waarin a en b de termen van de optelling heten en c de som.

Aftrekken: het bepalen van één van de termen van een optelling, bij een gegeven som en term (omkering van de bewerking optellen).

Welk getal moeten we optellen bij 2 om als som 5 te krijgen?

$$2 + ? = 5 \quad 5 - 2 = 3 \quad \text{dus } ? = 3$$

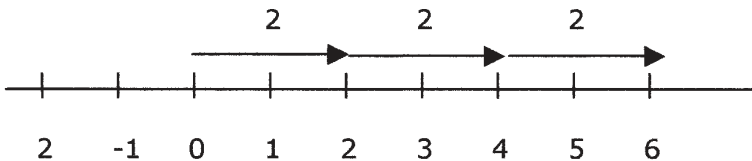
Algemeen: $c - a = b$ indien $b + a = c$

Waarin c en a de termen heten en b het verschil van de aftrekking.

Vermenigvuldigen: het herhaald optellen van gelijke termen.

Voorbeeld

$$2 + 2 + 2 = 3 * 2 = 6$$



en tellen we 4 keer het getal a op, dan wordt dat:
 $a + a + a + a = 4 * a = 4a$

Algemeen: $a * b = c$ of $ab = c$

waarin a en b de factoren zijn en c het product van de vermenigvuldiging is. Merk op dat $0 * a = 0$ en $b * 0 = 0$; een product wordt dus 0 als een van de factoren 0 is.

Delen : het bepalen van één van de factoren van een product, bij een gegeven factor en gegeven product (omkering van vermenigvuldigen).

Met welk getal moeten we 4 vermenigvuldigen om 20 te krijgen?

$$4 * ? = 20 \quad 20 : 4 = 5 \quad \text{of} \quad \frac{20}{4} = 5$$

Algemeen: $c : a = b$ of $\frac{c}{a} = b$ indien $a * b = c$ ($a \neq 0$)

Het getal a kan niet gelijk zijn aan 0, immers dan zou moeten gelden: $5 : 0 = b$ indien $0 * b = 5$, echter $0 * b = 0$ (ongeacht wat b is), dus er is geen enkele b te vinden waarvoor geldt: $0 * b = 5$.

Machtsverheffen: het herhaald vermenigvuldigen van gelijke factoren.

Voorbeelden

$$5 * 5 * 5 * 5 = 5^4 = 625$$
$$2^3 = 2 * 2 * 2 = 8$$

Algemeen: $a^b = c$

Waarin a het grondgetal, b de exponent en c de macht heet.

Worteltrekken: het bepalen van het grondgetal van de machtsverheffing, bij een gegeven exponent en macht (eerste omkering van machtsverheffen).

Welk getal moeten we tot de vierde 4 macht verheffen om 625 te krijgen?

$$?^4 = 625 \quad \sqrt[4]{625} = 5 \quad \text{dus } ? = 5$$

Algemeen: $\sqrt[b]{c} = a$ indien $a^b = c$

Waarin a de wortel, b de wortel exponent en c het grondgetal van de wortelvorm heet.

Logaritmen: het bepalen van de exponent van de machtsverheffen bij een gegeven grondgetal en macht (tweede omkering van machtsverheffen)

Tot welke exponent moet men 5 verheffen om 625 te krijgen?

$$5^? = 625 \quad {}^5\log 625 = 4, \text{ omdat } 5^4 = 625 \quad \text{dus } ? = 4$$

Algemeen: ${}^g\log a = c$ indien $g^c = a$

Waarin g de basis of grondgetal, a de numerus en c de logaritme heet.

Voorbeelden van machtsverheffen, worteltrekken en logaritmen

$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	${}^2\log 8 = 3$
$4^6 = 4096$	$\sqrt[6]{4096} = 4$	${}^4\log 4096 = 6$
$6^4 = 1296$	$\sqrt[4]{1296} = 6$	${}^6\log 1296 = 4$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$	${}^7\log 343 = 3$
$3^4 = 81$	$\sqrt[4]{81} = 3$	${}^3\log 81 = 4$

Volgorde van bewerkingen

Indien men meerdere bewerkingen met getallen uitvoert, dient men onderstaande volgorde te hanteren:

Machtsverheffen

Vermenigvuldigen/delen in de volgorde, waarin deze voorkomen

Worteltrekken

Optellen/aftrekken in de volgorde, waarin deze voorkomen.

Een uitzondering hierop vormt een bewerking, die tussen haakjes geplaatst staat, deze dient altijd als eerste uitgevoerd te worden.

Voorbeelden

$$4 + 3 - 2 = 7 - 2 = 5$$

$$4 - 3 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$36 : 3 * 4 = 12 * 4 = 48$$

$$36 * 3 : 4 = 108 : 4 = 27$$

$$4 * 3 + 2 = 12 + 2 = 14$$

$$4 * (3 + 2) = 4 * 5 = 20$$

$$4 + 3 * 2 = 4 + 6 = 10$$

$$36 : 6 - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$36 : (6 - 2) = 36 : 4 = 9$$

$$36 - 6 : 2 = 36 - 3 = 33$$

2.2 BEWERKINGEN BINNEN DE VERZAMELING Z

Optellen en aftrekken van positieve en negatieve getallen

Bij optellen/aftrekken van negatieve/positieve getallen heeft men te maken met twee soorten tekens:

1. Tekens van het getal zelf -4 (negatief getal) +3 (positief getal)
2. Tekens van de bewerking - (aftrekken) + (optellen)

Bij optellen/aftrekken is de combinatie van het bewerkingsteken en het teken van het getal, dat na het bewerkingsteken staat van belang. Die combinatie geeft aan welke bewerking uiteindelijk wordt uitgevoerd. Een combinatie van + (optellen) en + (positief getal) levert altijd de bewerking optellen.

Voorbeelden

$$\begin{array}{l} +20 + +5 = +20 + 5 = 25 \\ -20 + +5 = -20 + 5 = -15 \end{array}$$

Een combinatie van + (optellen) en - (negatief getal) of een combinatie van - (aftrekken) en + (positief getal) levert altijd de bewerking aftrekken.

Voorbeelden

$$\begin{array}{l} +20 + -5 = 20 - 5 = 15 \\ -20 + -5 = -20 - 5 = -25 \\ +20 - +5 = 20 - 5 = 15 \\ -20 - +5 = -20 - 5 = -25 \end{array}$$

Een combinatie van - (aftrekken) en - (negatief getal) levert altijd de bewerking optellen.

Voorbeelden

$$\begin{array}{l} 20 - -5 = 20 + 5 = 25 \\ -20 - -5 = -20 + 5 = -15 \end{array}$$

Neutraal element

Onder het neutrale element van optellen, verstaat men een getal, dat de bewerking neutraliseert. D.w.z. als men bij ieder willekeurig getal a het neutrale element optelt, blijft de som a én als men bij het neutrale element een willekeurig getal a optelt,

blijft de som a (de optelling heeft geen effect). Welk getal moet men bij 4 optellen, om als som 4 te krijgen?

$$4 + ? = 4 \quad 4 + 0 = 4 \quad \text{en} \quad 0 + 4 = 4$$

Hieruit volgt dat het neutrale element voor de bewerking optellen gelijk is aan 0.

Het neutrale element van optellen is 0.

Het tegengestelde van een getal

Het tegengestelde van een getal a is dat getal dat men bij a moet optellen om het neutrale element te verkrijgen.

$$4 + ? = 0 \quad 4 + -4 = 0$$

Het tegengestelde van een getal a is dus gelijk aan $-a$. Zo is het tegengestelde van -3 gelijk aan $-(-3) = +3$; het tegengestelde van $\sqrt{7}$ gelijk aan $-\sqrt{7}$

Voor de bewerking aftrekken bestaat geen neutraal element.

Immers: $4 - 0 = 4$, maar $0 - 4 = -4$

Vermenigvuldigen en delen van positieve en negatieve getallen

Voor het vermenigvuldigen/delen van positieve/negatieve getallen gelden de volgende regels:

1. positief getal $\cdot$ (of $:$) een positief getal levert een positief getal.

Voorbeelden

$$\begin{array}{rcl} +4 & \cdot & +5 = +20 \\ +20 & : & +5 = +4 \end{array}$$

2. positief getal $\cdot$ (of $:$) een negatief getal levert een negatief getal. Een negatief getal $\cdot$ (of $:$) een positief getal levert een negatief getal.

Voorbeelden

$$\begin{array}{rcl} 4 & \cdot & -5 = -20 \\ 20 & : & -5 = -4 \\ -4 & \cdot & 5 = -20 \\ -20 & : & 5 = -4 \end{array}$$