

VICTOR GIJSBERS

Oneindigheid

Een filosofische gids

Boom

Inhoud

Inleiding 9

Tellen zonder einde 9

Het oneindige 12

De ondenkbaarheid van het oneindige 18

De denkbaarheid van het oneindige 22

1. Het oneindig kleine van Achilles tot Aristoteles 27

De paradoxen van Zeno 27

Discrete ruimte 33

Het voltooien van een oneindige reeks 36

Wiskundig intermezzo: limieten 41

Aristoteles en het potentieel oneindige 43

Potentieel of werkelijk? 48

2. Het oneindig grote van Aristoteles tot Einstein 53

Het argument van de speerwerper 53

De ruimte van Aristoteles 57

De ruimte van Einstein 61

Een causaliteitsargument voor oneindige tijd 66

Moet het verleden eindig zijn? 70

Alle opties open 77

3. Herhaling en wederkeer 81

De mens, een detail 81

Leven met nietigheid 84

De oneindige herhalingen van Blanqui 91

Blanqui's wanhoop 97

De verlossing van Nietzsche 100

Coda: konijntjes 108

4. Het eeuwige leven 111

- De angst voor de dood 112
- Gedenk te sterven 114
- Onsterfelijkheid 122
- Het probleem van de hemel 126
- Leven en de dood 130

5. De wiskunde van het oneindige 133

- Wiskunde en filosofie 133
- Verzamelingen 137
- Verzamelingen, deelverzamelingen, machtigheid 140
- Voorbij $\aleph_0$: de reële getallen 144
- Ordinaalgetallen en ordetypes 149
- De oneindige ordinaalgetallen 155
- De continuümhypothese en het absoluut oneindige 162

6. Wittgenstein als therapeut 167

- Gaat het oneindige ons verstand te boven? 167
- Enzovoorts, ... 172
- Zijn de oneindige getallen reusachtig groot? 177
- Nogmaals de continuümhypothese en het absoluut oneindige 182

7. Kant en de eindigheid 191

Overzicht van Kants positie 191

Descartes, Kant, en de externe wereld 195

Eindigheid en de standaard van ons denken 198

Kant tegen het scepticisme 201

De vorm van het eindige denken 205

De autonomie van het eindige denken 209

Potentiële oneindigheid 213

Conclusie 219

Verwijzingen en literatuursuggesties 231

Dankwoord 237

Inleiding

TELLEN ZONDER EINDE

Het oneindige klinkt als een ver-van-je-bedshow die je hoogstens in esoterische geschriften zal vinden. Maar het kan zomaar opduiken, aan de keukentafel bijvoorbeeld. ‘Papa,’ vroegen mijn kinderen toen ze zo’n vijf jaar oud waren, ‘tot hoever kan jij tellen?’ Een logische vraag. Zelf hadden ze net geleerd om tot twintig te tellen, of tot honderd, maar wat er daarna kwam, dat wisten ze niet. Voor hen was tellen een proces waarbij je op een bepaald punt vastloopt. Dus waar loopt papa vast? Bij duizend? Of pas bij de mysterieuze getallen ‘miljoen’ en ‘miljard’?

Maar papa loopt niet vast. Voor *elk* getal geldt dat ik ook weet hoe het getal heet dat één groter is. Zelfs als de naam van, bijvoorbeeld, een één met vierentwintig nullen me even zou ontschieten – we hebben het nu eenmaal niet dagelijks over quadriljoenen – dan zou ik het ‘een één met vierentwintig nullen’ kunnen noemen. Geen probleem. En daarna komt het getal dat je krijgt door die laatste nul in een één te veranderen. En daarna in een twee. En daarna in een drie.

Welk getal je me ook geeft, ik kan je altijd vertellen welk getal erna komt. Ik kan eindeloos doortellen. En toch kan ik niet *alle getallen* tellen (want er zijn er altijd nog meer) en kan ik ook niet *tot elk willekeurig getal* tellen (want zelfs als mijn motivatie eindeloos zou zijn, is mijn leven toch veel te kort om die quadriljoen ooit te halen). Je zou kunnen zeggen: ik ken perfect de weg in het rijk der getallen, ook al heb ik het grootste deel nooit bezocht.

Hoe kan het eigenlijk dat ik nooit vastloop wanneer ik ga tellen? Hoe kan het dat elk getal een naam heeft, en dat ik, beperkt wezen dat ik ben, ze *allemaal* ken? Alle oneindig veel? Het is helemaal niet vanzelfsprekend dat ik de namen van dingen ken. Er zijn een slordige acht miljard mensen op aarde, maar toch ken ik van de overgrote meerderheid de naam niet. Of neem de zandkorrels op het strand bij Scheveningen. Die hebben niet eens namen! Stel dat we die korrels een voor een langs moesten gaan om ze een naam te geven: 'Tillie, Fardau, Noah, Immanuel, ...' Een monnikenwerk waarvan de nutteloosheid alleen door de onuitvoerbaarheid overtroffen zou worden!

Wat maakt getallen anders dan zandkorrels? Ten eerste dat we voor de namen van getallen een *systeem* hebben. De eerste tien getallen schrijven we als 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Daarna maken we volgens een vast recept combinaties van deze symbolen: eerst van twee symbolen, 10, 11, 12, ...; als we die allemaal hebben gehad van drie symbolen, 100, 101, 102, ...; enzovoorts. Het systeem zit zo in elkaar dat het bij iedere naam duidelijk is wat de volgende naam is. We kunnen altijd doorgaan met namen genereren.

Toch zijn die eindeloze namen op zichzelf niet genoeg. Ik zou die ook voor zandkorrels kunnen gebruiken, en deze '0', '1', '2', enzovoorts noemen. Maar dan zou ik nog steeds het monnikenwerk moeten doen; ik zou de korrels alsnog een voor een langs moeten gaan, aan moeten wijzen, en een naam moeten geven. 'Deze bruinige korrel hier noem ik 62781. Die witte ernaast noem ik 62782.' Niet te doen natuurlijk; en trouwens, niemand zou het resultaat kunnen onthouden.

Waarom lukt het me met de getallen dan wel, terwijl er daar nota bene *veel meer* van zijn (oneindig veel meer zelfs) dan van zandkorrels op het strand van Scheveningen? Het verschil is dit. De zandkorrels en de naamgeving hebben niets met elkaar te maken. Nadat ik een systeem heb bedacht om eindeloos veel

namen te genereren, moet ik nog steeds de zandkorrels een voor een koppelen aan die namen. Maar de getallen hebben iets fundamenteels gemeen met hun namen. We zouden kunnen zeggen dat de vorm van de getallenreeks identiek is aan de vorm van hun naamgeving.

Die vorm, dat is de vorm van *opeenvolging*. Voor elke naam vertelt het systeem ons hoe we de daaropvolgende naam moeten maken. Na 145 komt 146, na 39349 komt 39350, enzovoorts. Ook voor de getallen geldt dat ze allemaal een opvolger hebben, namelijk het getal dat één groter is. Als we de namen aan de getallen willen koppelen, hoeven we dus niet bij elk getal een naam te kiezen. Nee, we hoeven alleen maar het kleinste getal (het getal dat niet volgt op een ander getal, omdat het is waar we beginnen met tellen) te koppelen aan de eerste naam (de naam die niet volgt op een andere naam, omdat het is waar we beginnen met het maken van namen). Die eerste naam is 'o', en zo noemen we dan ook het eerste getal. Vervolgens spreken we af dat elke volgende naam hoort bij het volgende getal. Zo wordt de naam 1 geplakt op de opvolger van 0, de naam 2 op de opvolger van 1, en, verderop in de reeks, de naam 39350 op de opvolger van 39349. We hoeven niet elk getal afzonderlijk een naam te geven, omdat we er door middel van een paar simpele regels voor kunnen zorgen dat bij elk getal precies één naam hoort, en bij elke naam precies één getal.

Dit is alleen maar mogelijk omdat de getallen geen van het tellen onafhankelijke dingen zijn. De getallen zijn *niets anders dan* het idee van tellen en opeenvolging. Het getal 39350 is niet een of andere mysterieuze entiteit die we ergens in het universum moeten opsporen, en waarvan we er dan tot onze grote schrik experimenteel achter zouden kunnen komen dat het eigenlijk de opvolger is van 12 en niet van 39349. Nee, 39350 is niets meer en niets minder dan datgene wat na 39349 komt. Dat is waarom onze methode van naamgeving voor de getallen werkt; en dat is

ook waarom we zeker kunnen weten dat we nooit, echt nooit, bij een grootste getal zullen uitkomen. De getallen *zijn* het idee van een opeenvolging die nooit stopt.

HET ONEINDIGE

Je blijkt aan een kind van een jaar of vijf al heel goed te kunnen uitleggen dat er geen grootste getal is, omdat je er altijd nog weer één bij kan doen. Er komt geen einde aan de getallen. Ze zijn, met andere woorden, *oneindig* – een woord dat op mijn kinderen veel indruk maakte en daarna vaak gebruikt werd, te pas en vooral ook te onpas. ‘Ik vind courgette niet vies, en niet heel vies, maar echt *oneindig* vies!’ kreeg de kok des huizes dan te horen.

Die uitspraak verraaft dat mijn kinderen het oneindige zien als de overtreffende trap van ‘groot’ of ‘veel’. Je hebt veel; je hebt heel erg veel; en dan heb je, daar weer voorbij, ook nog *oneindig veel*. Ook volwassenen hebben de neiging het oneindige te visualiseren als een heel grote hoeveelheid. Misschien stellen we ons wel een sterrenhemel voor bomvol kleine lichtpuntjes, en dan zeggen we bij onszelf: ja, het oneindige is zoiets als dit, maar dan *nog meer*!

Het is echter maar de vraag of we op die manier over het oneindige mogen nadenken. Wel volgens de glasvezelaanbieder die ik zag adverteren met: ‘De snelheid van ons internet is bijna oneindig!’ We zijn nog *nét* niet helemaal bij het oneindige, lijkt de gedachte te zijn. Maar het ligt vlak om de hoek! Onzin, natuurlijk. Een quadriljoen is veel meer dan dertien. En toch ligt een quadriljoen *precies even ver* van het oneindige af als dertien – namelijk, oneindig ver. Wie van een sadistische godheid de opdracht krijgt om naar het oneindige te lopen, kan niet na waanzinnig veel eeuwen bij zichzelf denken: ‘Nou, ik heb al

een quadriljoen kilometer afgelegd, de kop is er gelukkig af! De kop is er helemaal niet af. De weg die je nog gaan moet, is geen meter korter geworden.

Het oneindige gedraagt zich dus heel anders dan grote getallen. Je kan er niet dichterbij komen. Er is niet zoiets als 'halverwege' het oneindige zijn. Dit roept de vraag op – een cruciale vraag in de filosofie van het oneindige – of we het oneindige überhaupt wel als een hoeveelheid, als een grootte, als een *getal* mogen begrijpen.

Neem de getallen waar we onze speurtocht mee begonnen: 0, 1, 2, 3, enzovoorts. In de wiskunde noemen we dit de *natuurlijke* getallen. Vrijwel iedereen zal beamen dat er oneindig veel van zulke natuurlijke getallen zijn. Maar wat bedoelen we precies wanneer we dat zeggen? Hier zijn twee heel verschillende interpretaties:

1. Als we zeggen dat er oneindig veel natuurlijke getallen bestaan, bedoelen we niets anders dan dat je altijd kan doorgaan met tellen; dat er *geen einde komt* aan de natuurlijke getallen.
2. Als we zeggen dat er oneindig veel natuurlijke getallen bestaan, bedoelen we dat alle natuurlijke getallen samen, als eenheid gedacht, een *oneindige hoeveelheid* vormen.

De eerste interpretatie begrijpt oneindigheid als eindeloosheid: er zijn er altijd nog meer, je komt nooit aan het einde. We noemen dit idee van het oneindige het **potentieel oneindige**. Cruciaal is dat we in deze interpretatie oneindigheid *niet* als een hoeveelheid begrijpen. Het is *niet* een heel groot getal. Wanneer we de getallen *potentieel oneindig* noemen, doen we een uitspraak over het proces van het tellen – dat houdt nooit op – maar niet over 'alle getallen samen'. Er bestaat volgens deze interpretatie niet zoiets als 'alle natuurlijke getallen', want dat woord 'alle' suggereert dat we klaar zijn met tellen. En dat kan nu juist niet.